چکیده مبسوط مقالات ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

رابطه متروید با کد و شبکه

فریدون رهبرنیا[۱]، سمیه رحمنی[۲]، و سیده‌مریم حسینی‌پور[۳]*

[۱,۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
rahbarnia@ferdowsi.um.ac.ir[۱]
m_hoseini_ p2009@yahoo.com[۳]
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه
somayeh_ 1151@yahoo.com[۲]

چکیده. در این مقاله، ابتدا متروید را تعریف می‌کنیم. متروید را می‌توان به عنوان یک تعمیم مشترکی از گراف‌ها و ماتریس‌ها معرفی کرد که کاربردهایی در شبکه‌های ارتباطی و شبکه‌های الکتریکی و کدگذاری دارد. بنابراین در این مقاله تعریفی از کد و شبکه بیان می‌کنیم و سپس رابطه بین متروید و کد را بیان میکنیم. فاصله هامینگ بین دو عنصر و وزن یک عنصر را تعریف می‌کنیم و در آخر رابطه متروید با شبکه را بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۳۵ ویتنی[۱]، متروید را به عنوان یک تعمیم مشترکی از گراف‌ها و ماتریس‌ها معرفی کرد. متروید یک تصور انتزاعی از استقلال خطی در یک فضای برداری است، که کاربردهایی در شبکه‌های ارتباطی و شبکه‌های الکتریکی و کدگذاری دارد ما در اینجا رابطه متروید با کد و شبکه را بیان می‌کنیم.

۲. مفاهیم اولیه متروید

تعریف ۱.۲. *یک متروید، زوج مرتب $M = (E, I)$ است که در آن E یک مجموعه متناهی و I گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در شرایط زیر صدق می‌کند:*

$(1)\ \emptyset \in I$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. متروید، کد، شبکه، فاصله هامینگ .

* سخنران

[۱]Whitney

$$(2)\ if\ i \in I,\ i' \subseteq i \Longrightarrow i' \in I$$
$$(3)\ if\ I_1, I_2 \in I,\ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists \alpha \in I_2 - I_1; I_1 \cup \{\alpha\} \in I$$

اگر $M = (I, E)$ یک متروید باشد، آنگاه M را یک متروید روی E و E را مجموعه زمینه متروید M گویند. هر عضو گردایه I را یک مجموعه مستقل متروید M گویند.
زیرمجموعه‌هایی از E، که عضو I نیستند را مجموعه‌های وابسته گویند. مجموعه‌های مستقل ماکسیمال، پایه‌های متروید را تشکیل می‌دهند. پایه‌ها معادل درخت‌های فراگیر هستند. پایه را با $B(M)$ نمایش می‌دهند.

۳. خواص اساسی پایه‌ها

تعریف ۱.۳. *یک عنصر با طول n روی میدان F را به‌صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌های از این عناصر را یک کد[۲] با طول n می‌گوییم.*

تعریف ۲.۳. *کد C را خطی[۳] گویند هرگاه زیر-مجموعه‌ای از F^n باشد، هر کد خطی از طول n و بعد k را یک $[n, k]$ کد گوییم. اگر C یک $[n, k]$ کد باشد، ماتریس مولد C را بصورت یک ماتریس $k \times n$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۳.۳. *تعداد مولفه‌های متفاوت بین دو عنصر a, b را فاصله هامینگ[۴] بین دو عنصر a, b گویند که با $d(a, b)$ نشان می‌دهند و داریم:*

$$d(a, b) = |\{i : ۱ \leq i \leq n, a_i \neq b_i\}|$$

تعریف ۴.۳. *تعداد مولفه‌های غیرصفر را وزن[۵] a می‌نامیم و آنرا با $Wt(a)$ نشان می‌دهیم در واقع داریم: $Wt(a) = d(a, ۰)$.*

مثال ۵.۳. *فرض کنید کد C روی میدان $GF(۴)$ برابر است با:*

$$o = (۰۰۰۰۰),\ y = (۱۱۰۱۰),\ x = (۰۱۰۱۱)$$

داریم:

$$Wt(y) = ۳,\ Wt(x) = ۳,\ d(x, y) = ۲$$
$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$
$$A \cong U_{۲,۵}$$

[۲] Code
[۳] Linear code
[۴] Hoaming distance
[۵] Weight

۴. شبکه

شبکه[۶] N ، گراف چندگانه‌ی جهت‌دار بی‌دور است بعضی از گره‌ها در شبکه، منبع اطلاعات هستند و بعضی دیگر از گره‌ها، گیرنده اطلاعات (دریافت کننده) هستند. در ارتباط با این مسئله منابع اطلاعات، پیام‌هایی هستند که تولید می‌شوند تا هر گیرنده‌ای آن پیام‌ها را تقاضا کند. هر دریافت کننده -(گیرنده) یک تابع کشف رمز دارد که پیام را درک می‌کند. در اینجا هدف این است که هر گیرنده‌ای پیامی را که تقاضا کرده، به دست می‌آورد.

۵. مفاهیم اساسی شبکه

فرض می‌کنیم در اینجا حداقل یک مسیر جهت‌دار از گره منبع به هر دریافت–کننده‌ای که یک پیام تولید شده توسط آن گره منبع را، تقاضا می‌کند، وجود دارد.

۶. رابطه شبکه با مترويد

فرض کنید شبکه N، مجموعه پیام μ، مجموعه گره ν و مجموعه یال ε را دارد. مجموعه پیام‌ها در μ، متغیرهای تصادفی مستقل هستند. فرض کنید $M = (I, E)$ یک مترويد با تابع رتبه r باشد. N، یک شبکه مترويدی است هرگاه تابع f با این ویژگی، $f : \mu \cup \varepsilon \longrightarrow E$، وجود داشته باشد و همچنین در شرایط زیر صدق کند:

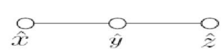
(۱) f یک تابع یک به یک رود μ است.

(۲) $f(\mu) \in I$

(۳) $r(f(Z_{in(x)})) = r(f(Z_{in(x)} \cup Z_{out(x)})),\ \forall x \in \nu$

۷. ایجاد شبکه از مترويد

$$E = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$



شکل ۱

مرحله اول: یک پایه برای مترويد M، مثل B و پیام‌های شبکه مثل x, y را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

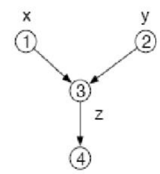
$$(B = \{\hat{x}, \hat{y}\})$$
$$f(x) = \hat{x},\ f(y) = \hat{y}$$

[۶] Network

شکل ۲

مرحله دوم: دور C را انتخاب می‌کنیم و گره‌های n_3 و n_4 را مشخص می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

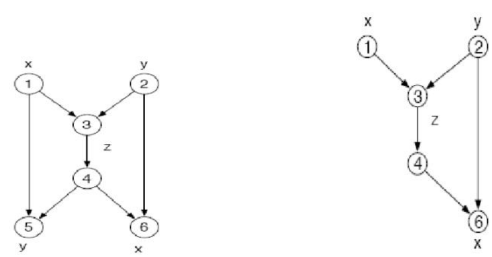
$$f(e_{1,3}) = \hat{x},\ f(e_{2,3}) = \hat{y},\ f(e_{3,4}) = \hat{z}$$



شکل ۳

مرحله سوم: دور C را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $\hat{x}$، تصوری از گره منبع با پیام x است. یک گره دریافت کننده مثل n_6 اضافه می‌کنیم که x را تقاضا می‌کند: (شکل ۴ (آ))

مرحله چهارم: دور C را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $\hat{y}$، تصوری از گره منبع با پیام y است. یک گره دریافت کننده مثل n_5 اضافه می‌کنیم که y را تقاضا می‌کند: (شکل ۴ (ب))



(ب) (آ)

شکل ۴

مراجع

1. R. Dougherty, C. Freilng and K. Zeger, *Networks, matroids and non-shannon information inequalities*, IEEE Transactions on Information Theory 53 (2007), no. 6.
2. C. Greene, *Weight enumeration and the geometry of linear codes*, Studia Appl. Math. 55 (1976), 119–128.
3. J. G. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.