توابع توزیع، چگالی و گشتاور آماره‌های ترتیبی توزیع بتا-پارتو

رقیه ماکویی
دانشکده پزشکی- دانشگاه علوم پزشکی تبریز
rmakuyi@yahoo.com

حسین جباری خامنه‌ای
گروه آمار-دانشگاه تبریز
H-jabbari@tabrizu.ac.ir

چکیده

در این مقاله توزیع بتا-پارتو چهار پارامتری تعریف و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. توابع توزیع و چگالی برای این توزیع به دو صورت محاسبه می‌گردد. توزیع i−امین آماره‌ی ترتیبی و گشتاور i−امین آماره‌ی ترتیبی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی : آماره‌های ترتیبی؛ توزیع بتا-پارتو؛ گشتاور مرتبه i-ام.

۱. پیش‌گفتار

توزیعهای آماری به عنوان ابزاری مهم در تجزیه و تحلیل داده‌ها از دیرباز مورد استفاده محققین بوده است. دلیل این امر این است که با شناسایی مدل مناسب داده‌ها، استنباط‌های مربوط به داده‌ها، قابل انجام است. در شناسایی مدل مناسب، توزیع‌های با قابلیت انعطاف بالا، مورد استفاده قرار می‌گیرند. توزیع‌های تعمیم یافته به عنوان خانواده‌ای از توزیع‌هایی که انعطاف‌پذیری بالایی دارند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که خانواده‌ی توزیع‌های پارتو قابلیت بالایی در مدل‌سازی توزیع‌های دم‌سنگین دارد. این گونه توزیع‌ها بیشتر در داده‌های مربوط به درآمد، جمعیت شهری، اندازه‌ی شرکت‌ها و .... کاربرد دارند. با توجه به اینکه در زمینه‌های مهم و مختلفی توزیع‌های با رفتار دم سنگین کاربرد پیدا می‌کند، بررسی اینگونه توزیع‌های تعمیم یافته ضرورت می‌یابد.

۲. معرفي صورت كلي توزیع‌های تعمیم‌یافته

اگر x يك متغير تصادفي با تابع توزيع G(x) باشد، تابع توزيع براي حالت تعميم يافته‌ی متغير تصادفي x به صورت زير بيان می‌شود.

$$F(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_{0}^{G(x)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{۱}$$

تابع چگالی مربوط به (۱) از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}[G(x)]^{\alpha-1}[1-G(x)]^{\beta-1}G'(x) \quad \alpha>0,\beta<\infty \tag{۲}$$

نویسندگان مختلف چگالی بیان شده در رابطه (۲) را با فرض های G(x) مختلف بررسی و مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مقاله G(x) را معادل تابع توزیع پارتو فرض نموده و به کمک صورت تعمیم یافته ی بیان شده در معادله‌ی (۱) ، به تعریف توزیع بتا-پارتو خواهیم پرداخت.

۳. توابع چگالی و توزیع بتا-پارتو

روش اول: گوییم متغیر تصادفی x دارای توزیع پارتو می‌باشد اگر توابع توزیع و چگالی آن به ترتیب بصورت(۳) و (۴) باشد .

$$G(x)=1-(\frac{x}{\theta})^{-k} \tag{۳}$$

$$g(x)=\frac{k\theta^{k}}{x^{k+1}}, \qquad \theta,k>0\ x\geq\theta. \tag{۴}$$

به کمک رابطه ی (۲)، تابع چگالی برای توزیع بتا-پارتو به صورت زیر خواهد بود[۱]:

$$f(x)=\frac{k}{\theta B(\alpha,\beta)}1-(\frac{x}{\theta})^{-k^{\alpha-1}}(\frac{x}{\theta})^{-k\beta-1} \quad \alpha,\beta,\theta,k>0 \quad \& \quad x\geq\theta. \tag{۵}$$

با انتگرال‌گیری از (۵) روی بازه‌ی $[\theta, X]$ ، تابع توزیع بتا-پارتو قابل محاسبه است:

$$F(x)=\int_{\theta}^{x} f(t)dt=\int_{\theta}^{x}\frac{k}{\theta B(\alpha,\beta)}\,1-(\frac{t}{\theta})^{-k^{\alpha-1}}(\frac{t}{\theta})^{-k\beta-1}dt$$

$$=\frac{k}{\theta B(\alpha,\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{i}(-1)^{i}\int_{\theta}^{x}(\frac{t}{\theta})^{-k\beta-1}(\frac{t}{\theta})^{-ki}=\frac{1}{B(\alpha,\beta)(i+\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{i}(-1)^{i}H(x;\theta,k(i+\beta)) \quad (6)$$

در رابطه‌ی (۳)، $H(x,\theta,k(i+\beta))$ تابع توزیع پارتو با پارامترهای θ و $k(i+\beta)$ می‌باشد.

روش دوم: برای دستیابی به تابع چگالی امین-i آماره‌ی ترتیبی توزیع بتا-پارتو ابتدا مطلوبست که توابع چگالی و توزیع بتا-پارتو را به کمک صورت تعمیم یافته‌ی توزیع پارتو و نیز روابط موجود بین توزیع بتا و دوجمله‌ای محاسبه کنیم. برای انجام این کار رابطه ی (۱) را به کمک توزیع دوجمله ای بسط می‌دهیم[۳].

$$F(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_{0}^{G(x)}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_{0}^{G(x)}t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta-1}{j}(-1)^{j}t^{j}dt$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)(\alpha+j)}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta-1}{j}G(x)^{\alpha+j}=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(G(x))^{\alpha+j}=\sum_{j=0}^{\infty}p_jG_j(x) \quad (7)$$

که در این رابطه:

$$p_j(x)=\frac{(-1)^{j}}{B(\alpha,\beta)(\alpha+j)}\binom{\beta-1}{j}=\frac{(-1)^{j}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-j)\Gamma(j+1)(\alpha+j)} \quad (8)$$

$$G_j(x)G(x)^{\alpha+j}=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l}\binom{\alpha-1}{l}(1-G(x))^{l}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+r}\binom{\alpha+j}{l}\binom{l}{r}G(x)^{r} \quad (9)$$

با جایگذاری (۹) در رابطه ی (۳) داریم :

$$F(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_j(-1)^{l+r}\binom{\alpha+j}{l}\binom{l}{r}G(x)^{r}=\sum_{r=0}^{\infty}b_rG(x)^{r} \quad (10)$$

$$b_r=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=r}^{\infty}p_j(-1)^{l+r}\binom{\alpha+j}{l}\binom{l}{r} \quad (11)$$

با مشتق گرفتن از رابطه ی (۳)، میتوان به راحتی تابع چگالی توزیع بتا-پارتو را محاسبه نمود:

$$F(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(G(x))^{\alpha+j}\longrightarrow f(x)=\frac{\partial}{\partial X}F(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\alpha+j)g(x)(G(x))^{\alpha+j-1} \quad (12)$$

۴. توابع چگالی و توزیع I-امین آماره‌ی ترتیبی توزیع بتا-پارتو

$$f_{i:n}(x)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}f(x)F^{i-1}(x)(1-F(x))^{n-1}=\frac{1}{B(i,n-i+1)}f(x)F^{i-1}(x)\sum_{m=0}^{n=i}(-1)^{m}\binom{n-i}{m}F^{m}(x)$$

$$=\frac{1}{B(i,n-i+1)}f(x)\sum_{m=0}^{n=i}(-1)^{m}\binom{n-i}{m}f(x)F^{i+m-1}(x) \quad (13)$$

و نیز با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۴) می‌توان نوشت :

$$f_{i:n}(x)=\int_{\theta}^{x}f_{i:n}(t)dt=\int_{\theta}^{x}\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}(-1)^{m}\binom{n-i}{m}f(t)F^{i+m-1}(t)dt=\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\frac{(-1)^{m}}{m+i}\binom{n-i}{m}F^{i+m}(x) \quad (14)$$

با بکارگیری سری توانی $(\sum_{r=0}^{\infty}b_ru^{r})^{n}=\sum_{r=0}^{\infty}c_{n-r}u^{r}$ [۲].

می‌توان نوشت $F^{i+m}(x)=(\sum_{r=0}^{\infty}b_rG^{r}(x))^{i+m}=\sum_{r=0}^{\infty}c_{i+my}G^{r}(x)$ و رابطه‌ی (۱۴) بصورت زیر بازنویسی شده و در نهایت تابع توزیع i-امین آماره‌ی ترتیبی توزیع بتا-پارتو به صورت (۴) به دست می‌آید.

$$F_{i:n}(x)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\frac{(-1)^{m}}{m+i}\binom{n-i}{m}(\sum_{r=0}^{\infty}C_{i+my}G^{r}(x))=\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m+i}\binom{n-i}{m}C_{i+my}(1-(\frac{x}{\theta})^{-k})^{r}$$

$$=\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m+i}\binom{n-i}{m}\binom{r}{l}C_{i+my}(\frac{x}{\theta})^{-ki} \quad (15)$$

که در رابطه‌ی (۴) به ازای $(r=1,2,\ldots)$، $c_{n-r}=(rb_0)^{-1}\sum_{m=1}^{r}[m(n+1)-r]b_mc_{ny-m}$ و $(c_{n=0}=b_0^{n})$. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۴) ، با محاسباتی مشابه رابطه‌ی (۱۶) که بیانگر تابع چگالی i-امین آماره توزیع بتا-پارتو است به دست می‌آید.

$$f_{i:n}(x)=\frac{\delta}{\delta x}F_{i:n}(x)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m+i}rk\binom{n-i}{m}\binom{r-1}{l}C_{i+my}\theta^{k(l+1)}x^{-k(1+l)-1} \quad (16)$$

۵. گشتاور مرتبه‌ی S−ام آماره‌های ترتیبی

با بکارگیری رابطه‌ی (۱۶) گشتاور مرتبه‌ی S−ام آماره‌های ترتیبی توزیع بتا−پارتو به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$E(x_{i:n}^{s})=\int_{\theta}^{\infty}x^{s}f_{i:n}(x)dx=\int_{\theta}^{\infty}x^{s}\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+l}}{m+i}rk\binom{n-i}{m}\binom{r-1}{l}C_{i+my}\theta^{k(l+1)}x^{-k(1+l)-1}dx$$

$$\frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{m=0}^{n=i}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+l}}{m+i}rk\binom{n-i}{m}\binom{r-1}{l}C_{i+my}\frac{\theta}{1+l-s/k} \quad (۱۷)$$

مراجع

[1] A. Akinesete, F. Famoye and C. Lee, *The Beta-Pareto Distribution*, Statistics **42** (2008), 547–563.

[2] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 7 Ed., (2007).

[3] A. A Jafari, S. Tahmasebi and M. Alizadeh, *The Beta-Gompertz Distribution*, Revista Colombiana de Estadistica **37** (2014), 139–156.