روش‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد حافظ خاصیت مثبت بودن برای معادلات واکنش-انتقال

محمد مهدی‌زاده
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
Muhammad.mehdizade@gmail.com

شهین حیدری
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
sh1990.heydari@gmail.com

چکیده

در این مقاله دو روش تفاضل متناهی غیراستاندارد برای حل عددی معادله واکنش-انتقال[۱]، که در مدل‌سازی مسأله حمله سلول‌های سرطانی به بافت‌های پیوندی ظاهر می‌شوند، ارائه می‌دهیم. روش‌های پیشنهادی حافظ خاصیت مثبت بودن هستند. نتایج عددی که مؤید کارایی روش می‌باشند نیز ارائه می‌شوند.

واژگان کلیدی : تفاضل متناهی غیراستاندارد؛ خاصیت مثبت بودن؛ معادله واکنش-انتقال.

Mathematics Subject Classification 2010: 65L05; 65L06; 65L12.

[۱] Reaction-advection equation

۱. پیش‌گفتار

روش‌های عددی فراوانی براساس تفاضل متناهی استاندارد وجود دارند که برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار می‌روند. برای اطلاعات بیشتر در مورد این روش‌ها می‌توان به کتاب‌های معروف [۴، ۱] مراجعه کرد. گاهاً اینگونه روش‌ها خواص کیفی معادله دیفرانسیل همانند: قانون بقا، خاصیت مثبت بودن و یکنواختی را حفظ نمی‌کنند. میکنز[۱] برای اولین بار در [۳] روش‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد را برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی کرد. اینگونه روش‌ها علاوه بر پایداری خطی خواص کیفی مسئله اصلی را که از لحاظ کاربردی اهمیت ویژه دارند، حفظ می‌کنند. روش میکنز برای حل معادلات دیفرانسیل براساس دو قاعده زیر ساخته می‌شود:

قاعده اول:
به جای طول گام رایج مکانی h، از $\phi(h)$ با شرط

$$\phi(h) = h + o(h^{2}), \quad h \longrightarrow 0,$$

استفاده می‌شود.

قاعده دوم:
جملات غیرخطی موجود در معادله دیفرانسیل به صورت غیرموضعی تقریب زده می‌شوند. به عنوان مثال:

$$u^{2} \approx a u_k^{2} + b u_k u_{k+1}, \quad a+b=1, \quad a,b \in R,$$
$$u^{3} \approx a u_k^{3} + (1-a) u_k^{2} u_{k+1}, \quad a \in R. \tag{1}$$

در این مقاله با استفاده از قوانین فوق، روش‌های تفاضل متناهی غیر استاندارد را برای مدل سرطانی [۲]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial c}{\partial x}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -pc, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon^{-1}(uc - p), \tag{4}$$

که در آن $u = u(x,t)$، $c = c(x,t)$ و $p = p(x,t)$ به ترتیب معرف غلظت سلول‌های مهاجم، بافت پیوندی و پروتئاز هستند، ارائه می‌دهیم.

[۱] Mickens

۲. نتایج اصلی

در روش‌های ارائه شده تقریب‌های معادلات (۳) و (۴) به صورت زیر هستند:

$$\frac{c_m^{k+1}-c_m^k}{\phi(\Delta t)}=-p_m^k c_m^{k+1}, \tag{۵}$$

$$\frac{p_m^{k+1}-p_m^k}{\varepsilon\phi(\varepsilon^{-1}\Delta t)}=\varepsilon^{-1}(u_m^k c_m^{k+1}-p_m^{k+1}). \tag{۶}$$

ساخت روش اول:
این روش با تغییر مخرج کسر مشتقات زمانی و مکانی روش ارائه شده در [۲]، برای معادله (۲) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{u_m^{k+1}-(u_m^k+u_{m-1}^k)/2}{\phi(\Delta t)}=u_m^k(1-u_m^{k+1})-\frac{u_m^k c_{m+1}^k-(u_m^k+u_{m-1}^k)c_m^k+u_{m-1}^k c_{m-1}^k}{\psi^2(\Delta x)}, \tag{۷}$$

که شکل صریح آن عبارت است از

$$u_m^{k+1}=\frac{2\phi(\Delta t)u_m^k+u_m^k(1-c_{m+1}^k)+u_{m-1}^k(1-c_{m-1}^k)+c_m^k(u_m^k+u_{m-1}^k)}{2(1+\phi(\Delta t))u_m^k}, \tag{۸}$$

و در آن توابع $\phi(\Delta t)$ و $\psi^2(\Delta x)$ به صورت زیر هستند:

$$\phi(\Delta t)=\frac{(1+(\Delta t))^2-1}{2},$$

$$\psi^2(\Delta x)=2\phi(\Delta t).$$

همان‌طور که از نتایج عددی در شکل ۱ دیده می‌شود، روش جدید خواص کیفی مسئله را حفظ می‌کند، یعنی بافت‌های پیوندی از حداکثر مقدار خود به غلظت صفر نزول و در مقابل تومور سرطانی از صفر به حداکثر مقدار خود افزایش پیدا کرده است.

ساخت روش دوم:
در این روش از هر دو قاعده میکنز استفاده شده است و شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\phi(\Delta t)}=au_{m-1}^k+(1-a)u_m^k-u_m^k u_m^{k+1}-\frac{u_m^k c_{m+1}^k-(u_m^k+u_{m-1}^k)c_m^k+u_{m-1}^k c_{m-1}^k}{\psi^2(\Delta x)}. \tag{۹}$$

که شکل صریح آن را می‌توان به صورت زیر

$$u_m^{k+1}=\frac{u_m^k(1+(1-a)\phi(\Delta t)-R(c_{m+1}^k-c_m^k))+u_{m-1}^k(a\phi(\Delta t)-R(c_{m-1}^k-c_m^k))}{1+u_m^k\phi(\Delta t)} \tag{۱۰}$$

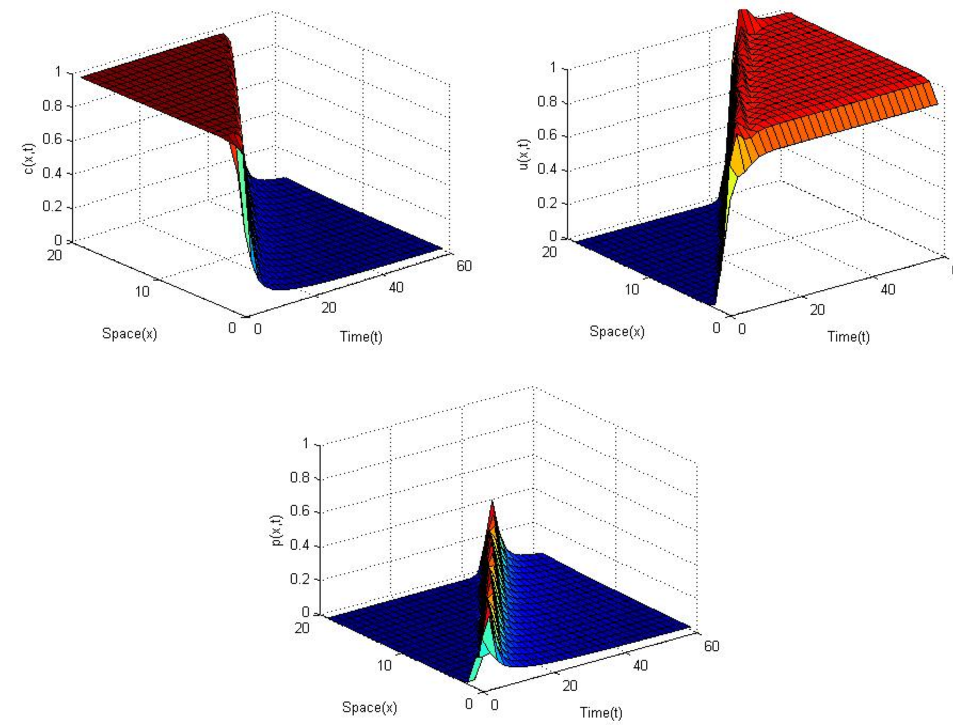
نوشت. روش (۱۰) با اعمال شرط زیر بر پارامتر a به صورت مشروط حافظ خاصیت مثبت بودن است:

$$\frac{R(c_{m-1}^k-c_m^k)}{\phi(\Delta t)}<a<\frac{R(c_{m+1}^k-c_m^k)-1+\phi(\Delta t)}{\phi(\Delta t)}.$$

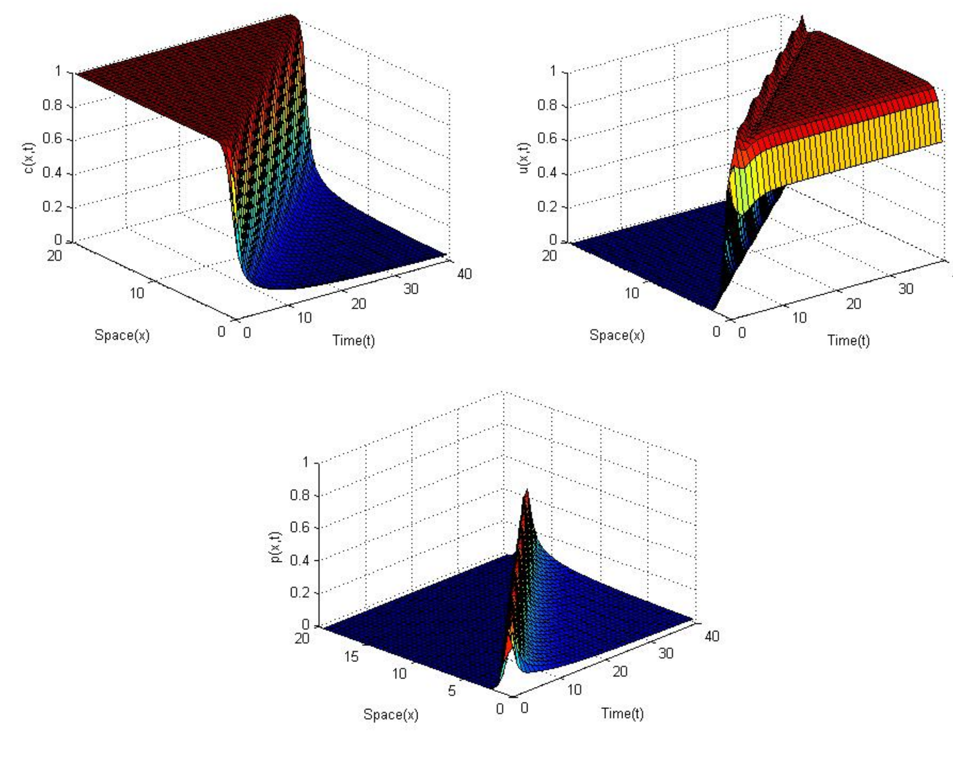
نتایج عددی در شکل ۲ با

$$\begin{aligned}&a=\tfrac{R(c_{m+1}^k-c_m^k)-1+\phi(\Delta t)}{\phi(\Delta t)}-0/1,\\&\phi(\Delta t)=e^{\Delta t}-1,\\&\psi^2(\Delta x)=2\phi(\Delta t),\\&R=\tfrac{\phi(\Delta t)}{\psi^2(\Delta x)}\end{aligned}$$

ارائه شده است.



شکل ۱: نتایج عددی روش (۸) با $\varepsilon = 0/2$، $\Delta t = 2$، $T = 60$، $\Delta x = 1$ و شرط اولیه $u^\circ(x) = exp(-x^2)$، $p^\circ(x) = 0/5u^\circ(x)$، $c^\circ(x) = 1 - 0/5u^\circ(x)$.



شکل ۲: نتایج عددی روش (۱۰) با $\varepsilon = 0/2$، $\Delta t = 1$، $T = 40$، $\Delta x = 0/5$ و شرط اولیه $u^\circ(x) = exp(-x^2)$، $p^\circ(x) = 0/5u^\circ(x)$، $c^\circ(x) = 1 - 0/5u^\circ(x)$.

مراجع

[1] W. F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Third Edition, Academic Press, San Diego, (1992).

[2] M. Chapwanya, J. M. S. Lubuma and R. E. Mickens, *Positivity-preserving nonstandard finite difference schemes for cross-diffusion equations in biosciences*, Computers and Mathematics with Applications, **68(9)** (2014), 1071–1082.

[3] R. E. Mickens, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore, (1994).

[4] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, Oxford (1985).