نقش جبر در ریاضیات

علیرضا نجفی‌زاده
استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران
ar_najafizadeh@yahoo.com

چکیده

این مقاله به رابطه بین علم جبر با دیگر شاخه‌های مختلف علم ریاضی از دیدگاه‌های متعدد پرداخته است. در واقع با ارایه مثال‌هایی در مدل‌بندی هندسی، به عملکرد مدول‌ها و قاعده کرامر در آن‌ها می‌پردازیم.

واژگان کلیدی : جبر؛ قاعده کرامر؛ مدول.

Mathematics Subject Classification 2010: 68Q99.

۱. پیش‌گفتار

امروزه نقش جبر در علم ریاضیات به عنوان یک ابزار قوی و مهم برای توصیف نحوه عملکرد اشیاء برای همگان مشخص و معلوم شده است. همان‌طور که می‌دانیم در علم جبر رفتار و عمل یک شیء مهم می‌باشد و نه خود آن. کاربردهای این علم در سایر شاخه‌های ریاضی روز به روز در حال افزایش است. به ویژه در دهه‌های اخیر کاربرد هندسه جبری و جبر جابجایی در حل مسایل مدل‌بندی هندسی کاملاً چشم‌گیر است. در این مقاله به رابطه بین علم جبر و ریاضیات از دیدگاه‌های مختلف پرداخته‌ایم. در واقع با ارایه مثال‌هایی در مدل‌بندی هندسی، به عملکرد مدول‌ها و قاعده کرامر در آن‌ها می‌پردازیم.

۲. نتایج اصلی

اولین مثال در این بخش شامل کاربرد قانون کرامر و قضیه هیلبرت–بورچ در تعیین ساختار برخی تحلیل‌های آزاد می‌باشد. قانون کرامر یک قانون شناخته شده و به عنوان یک مفهوم دارای سابقه طولانی در ریاضیات می‌باشد. مفهوم تحلیل آزاد مفهومی مجرد و از مفاهیم اساسی و جدید در جبر مجرد می‌باشد. همان‌طور که خواهیم دید این مفاهیم به طور طبیعی در مدل‌بندی هندسی ظاهر می‌شوند. اولین مثال در این مورد با تحقیق تام سدربرگ و فالای چن [۳] در مورد منحنی‌های پارامتری در صفحه شروع می‌شود. فرض کنیم چندجمله‌ای‌های $a(t)$، $b(t)$، $c(t)$ دو به دو نسبت به هم اول و از درجه n باشند. دراین‌صورت معادلات پارامتری:

$$x = \frac{a(t)}{c(t)}, \quad y = \frac{b(t)}{c(t)} \tag{۱}$$

یک منحنی را در صفحه توصیف می‌کنند. از نقطه نظر هندسی سدربرگ و چن در [۳] خطوط را به شکل زیر در نظر می‌گیرند:

$$A(t)x + B(t)y + C(t) = \circ, \tag{۲}$$

که در آن $A(t)$، $B(t)$ و $C(t)$ چندجمله‌ای‌هایی از پارامتر t هستند. اگر پارامتر t تغییر کند، آنگاه خط مفروض نیز تغییر می‌کند و لذا آن را خط متحرک می‌نامیم. یک خط را قابل پارامتری شدن گویند هرگاه با تغییر پارامتر t، نقاط متناظر روی خط مفروض قرار گیرند. به عبارت دیگر (۱) یک جواب برای معادله (۲) برای تمام مقادیر t می‌باشد. حال با جای‌گذاری این روابط و حذف مخرج کسرها به معادله زیر می‌رسیم:

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv \circ, \tag{۳}$$

که در آن علامت $\equiv$ به معنی برقرار بودن روابط برای تمام مقادیر t است. در واقع چندجمله‌ای:

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t)$$

چندجمله‌ای صفر است. سوال اساسی در اینجا این است که چه نوع ساختارهای جبری در این مثال استفاده می‌شود؟ توجه می‌کنیم که چون حوزه بحث روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، لذا حلقه مورد بحث $R = \mathbb{R}[t]$ می‌باشد. بنابراین خطوط متحرک $A(t)x + B(t)y + C(t) = \circ$ ناشی از (۱) متناظر با اعضای مجموعه:

$$\{(A(t), B(t), C(t)) \in \mathbb{R}^{3} : A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv \circ\} \tag{۴}$$

می‌باشد. این مجموعه یک R–زیرمدول از مدول آزاد R^{3} می‌باشد. در جبر جابجایی معادله (۳) را یک جفت و معادله (۴) را یک مدول جفت گویند. لازم به ذکر است که کلمه جفت در ستاره‌شناسی به مسیر سه جرم آسمانی اطلاق می‌شود که در یک راستا یا تقریباً یک راستا قرار دارند. این کلمه برای اولین بار در سال ۱۸۵۳ توسط سیلوستر [۴] در

ریاضیات استفاده شد. امروزه از کلمه جفت به معنی رابطه چندجمله‌ای بین پایاها یا ترکیب خطی بین ضرایب چندجمله‌ای همانند (۳) استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که بردار چندجمله‌ای‌ها به وفور در تحقیقات ریاضی مهندسی ظاهر می‌شود.

سدربرگ و چن دو خط متحرک را در نظر گرفتند که دارای صورت پارامتری شده (۳) باشند و منحنی را توسط نقطه اشتراک این دو خط متحرک توصیف کردند. آنها متوجه شدند که همواره دو خط متحرک:

$$p := A_1(t)x + B_1(t)y + C_1(t) = 0, \quad q := A_2(t)x + B_2(t)y + C_2(t) = 0 \tag{5}$$

وجود دارند و دارای خواصی می‌باشند که به صورت تذکرات زیر بیان می‌کنیم:

۱. تمام خطوط متحرک پارامتری شده توسط ترکیب خطی p و q حاصل می‌شوند. به عبارت دیگر این خطوط دارای شکل $h_1p + h_2q = 0$ می‌باشند که در آن h_1 و h_2 چندجمله‌ای‌هایی از t می‌باشند.

۲. اگر a و b و c از درجه n در t باشند، آنگاه p دارای درجه μ و q دارای درجه $n-\mu$ که در آن μ عدد صحیحی است که در شرط $0 \leq \mu \leq [n/2]$ صدق می‌کند.

۳. چندجمله‌ای‌های $a(t), b(t), c(t)$ مینورهای ماتریس زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} A_1(t) & B_1(t) & C_1(t) \\ A_2(t) & B_2(t) & C_2(t) \end{bmatrix}.$$

۴. معادله منحنی توسط نتیجه‌یاب $Resultant(p, q, t) = 0$ حاصل می‌شود.

خطوط متحرک p و q را خطوط $\mu-$پایه نامند. در واقع این خطوط $\mu-$پایه هم صورت پارامتری و هم معادله منحنی را مشخص می‌کنند. از دیدگاه جبر جابجایی تذکر (۱) فوق بیان می‌کند که مدول جفت یک مدول آزاد با پایه:

$$\{(A_i(t), B_i(t), C_i(t)) : i = 1, 2\}$$

می‌باشد که با توجه به نظریه مدول‌ها روی حوزه‌های ایده‌آلی اصلی این امری بدیهی است. همچنین تذکر (۲) فوق بیان می‌کند که محاسبات در حالت همگن انجام می‌شوند. در واقع اگر $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ را با چندجمله‌ای‌های همگن $a(s,t)$، $b(s,t)$ و $c(s,t)$ از درجه n جایگزین کنیم، آنگاه ایده‌آل زیر حاصل می‌شود:

$$I = (a(s,t), b(s,t), c(s,t) \subseteq S = \mathbb{R}[s,t].$$

در مراجع [۱] و [۲] ثابت می‌شود که تذکرات (۱) و (۲) تحلیل آزاد زیر را برای ایده‌آل I نتیجه می‌دهند:

$$0[r]S(-n+\mu) \oplus S(-2n+\mu)[r]^{\alpha} \qquad S(-n^{3})[r]^{\beta} I[r] \qquad 0 \tag{6}$$

که در آن نماد $S(-n)$ بیانگر اثر درجات بوده و نگاشت‌های α و β به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}.$$

تذکر (۳) فوق ایجاب می‌کند که a, b, c مینورهای 2×2 ماتریس 3×2 عبارت (۶) می‌باشند. در واقع این حالت خاصی از قضیه هیلبرت-بورچ می‌باشد.

حال خطوط متحرک معادله (۵) را در نظر می‌گیریم و این معادلات را برای متغیرهای x و y با استفاده از دستور کرامر حل می‌کنیم:

$$x = \frac{det\begin{bmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}} = \frac{det\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}}, \tag{7}$$

$$y = \frac{det\begin{bmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}} = \frac{-det\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}}.$$

حال با مقایسه این روابط با پارامتری‌سازی ذکر شده در (۱) ملاحظه می‌شود که a, b, c مینورهای 2×2 ماتریس تشکیل شده یک $\mu-$پایه می‌باشد. لازم به ذکر است که سدنبرگ و چن نتایج فوق را بدون آشنایی با مفهوم مدول در اواخر سال ۱۹۹۰ حدس زد. این مثال نشان می‌دهد که مدول‌ها نقشی در ریاضیات کاربردی دارند.

مراجع

[1] D. Cox, J. Little and D. O'shea, *Using Algebraic Geometry,* second ed., Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, (2005).

[2] D. Cox, T. Sederberg and F. Chen, *The moving line ideal basis of planar rational curves,* Comput. Aided Geom. Des. **15** (1998), 803–27.

[3] T. W. Sederberg and F. Chen, *Implicitization using moving curves and surfaces,* in Proceedings of SIGGRAPH, (1995), 8–301.

[4] J. J. Sylvester, *On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application of the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraic common measure,* Philos. Trans. Roy. Soc. London **143** (1853), 407–548.