طرح‌های تفاضلی محدود غیراستاندارد برای معادلات دیفرانسیل

کبری نوره
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران
Sari.Salar@gmail.com

چکیده

این مقاله طرح تفاضلی محدود غیراستاندارد برای حل مسائل مقداری ابتدایی یا معادلات دیفرانسلی معمولی به عنوان نسبت دو چندجمله‌ای یا تابع ارائه می‌دهد. یکی از قوانین غیراستاندارد تقریب تقسیم کننده (h) توسط تابع (h) می‌باشد. فن جدید مشتق‌گیری تابع دوباره نرمال‌شده توسعه و پایا می‌باشد.

واژگان کلیدی : طرح تفاضلی؛ مسئله مقدار اولیه؛ مشتق‌کننده‌ی دوباره نرمال‌شده؛ معادلات دیفرانسیل معمولی؛ ivp روش‌های غیراستاندارد.

۱. پیش‌گفتار

روش‌های غیراستاندارد با طرحی عددی برای معادلات دیفرانسیلی معمولی به کار بردیم که راه حل تحلیلی به صورت

$$F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta} \tag{۱}$$

تقریبی می‌گردد. اثر توابع با استفاده از

$$y' = f(x, y), \qquad y(\circ) = y_\circ \tag{۲}$$

آزمایش و طرح تفاضلی محدود غیراستاندارد توسط

$$y_{k+۱} = y_k + \varphi F(x_k, y_k) \tag{۳}$$

حالت نظارت می‌باشد (φ و F طبق پنج قانون مدل‌گیری میکنز ۱۹۹۴).

۲. ساختار طرح‌های عددی

برای ایجاد طرح از قوانین ۲ و ۳ مدل‌گیری غیراستاندارد قوانین میکنز (۱۹۹۴) تابع مشتق‌کننده بر حسب تابع مختلط (φ) بیان و به معرفی تابع تحلیلی مختلطی h در مشتق‌کننده با شرایط

$$\varphi(h) = h + O(h^۳) \tag{۴}$$

می‌پردازد. مثلاً شرایط غیرخطی $y^۲$ و $y^۳$ طبق بررسی آنگولا و لوباما (۲۰۰۳) مدل‌گیری می‌شود.

$$y^۲ \approx ay_k^۲ + by_k y_{k+۱}, \quad a+b=۱, \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{۵}$$
$$y^۳ \approx ay_k^۳ + (۱-a)y_k^۲ y_{k+۱}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{۶}$$

این دو ترکیب با مجموع ضرائب معادل ۱ می‌باشد و به صورت تقریبی $y^۲$ یا $y^۳$ خطایی از مرتبه‌ی $O(h)$ برای y مسطح می‌باشد. یعنی شرایط با حالتی که شامل تعداد معین پارامترهای آزاد است، تقریب می‌گردد.

۳. مشتق تقسیم‌کننده‌ی دوباره نرمال‌شده‌ی تابع $\varphi(H)$

فرض که $F(x)$ در (۳)، در دامنه‌ی راه حل‌های (۲)، تعریف و در F پیوسته باشد. داریم:

$$F(x)=\frac{\alpha+\beta}{x+\delta}$$

$$F'(x)=\frac{-(\alpha x+\beta)(x+\delta)+(x+\delta)\alpha}{(x+\delta)^{۲}}=\frac{\alpha\delta-\beta}{(x+\delta)^{۲}} \qquad (۷)$$

$$F(x_{n+۱})-F(x_n)=\frac{(x_{n+۱}-x_n)(\alpha\delta-\beta)}{(x_{n+۱}+\delta)(x_n+\delta)} \qquad (۸)$$

با کمک رابطه‌ی

$$F'(x_n)=y'(x_n)=f(x_n,y_n)=\frac{\alpha\delta-\beta}{(x_n+\delta)^{۲}} \qquad (۹)$$

$$y_{n+۱}-y_n=F(x_{n+۱})-F(x_n)=\frac{(x_{n+۱}-x_n)(\alpha\delta-\beta)}{(x_{n+۱}+\delta)(x_n+\delta)} \qquad (۱۰)$$

با جایگزین (۸) در (۱۰) داریم:

$$y_{n+۱}-y_n \quad = \quad \frac{(x_{n+۱}-x_n)(x_n+\delta)^{۲}f(x_n,y_n)}{(x_{n+۱}+\delta)(x_n+\delta)}=\frac{h(x_n+\delta)}{x_{n+۱}+\delta}f(x_n,y_n) \qquad (۱۱)$$

$$y_{n+۱}=y_n+\left[\frac{h(x_n+\delta)}{x_{n+۱}+\delta}\right]f(x_n,y_n) \qquad (۱۲)$$

و با مقایسه با (۳)، داریم:

$$\varphi=h\left[\frac{h(x_n+\delta)}{x_{n+۱}+\delta}\right]=h\left[\frac{nh+\delta}{nh+h+\delta}\right] \qquad (۱۳)$$

گزاره ۱.۳. شرایط $h\longrightarrow ۰$ به عنوان $\varphi\longrightarrow h+O(h^{۲})$ توسط

$$\varphi(h)=h\left(\frac{x_n+\delta}{x_{n+۱}+\delta}\right) \qquad (۱۴)$$

صدق می‌کند.

تئوری طرح غیراستاندارد $\varphi(h)$ همانند بررسی ایبوجولا و اوبایومی (۲۰۱۲) ایجاد می‌شود.

۴. مثال‌ها و آزمایش عددی

هدف، استفاده از تابع مشتق‌کننده‌ی جدید در کنار راه حل تحلیلی است. مشتق‌کننده برابر با

$$\left(\frac{e^{\lambda h}-۱}{\lambda}\right), \qquad -۱\leq\lambda\leq۱, \qquad \lambda\neq۰ \ (*)$$

مثال ۱.۴.

$$y'=f(x,y)=(y-۱)^{۲}, \qquad y(۰)=-۱$$

راه حل تحلیلی:

$$y=\frac{x-\frac{۱}{۲}}{x+\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y=\frac{\alpha x+\beta}{x+\delta}=\frac{x-\frac{۱}{۲}}{x+\frac{۱}{۲}}, \quad \alpha=۱, \quad \beta=-\frac{۱}{۲} \quad \delta=\frac{۱}{۲}$$

$$\varphi = h\left[\frac{nh+\delta}{nh+h+\delta}\right] \tag{۱۵}$$

شکل کلی طرح غیراستاندارد:

$$y_{n+1} = y_n + \varphi(y_n - 1)^2 \tag{۱۶}$$

$$y_{n+1} = y_n + \varphi(y_n^2 + 2y_n + 1) \tag{۱۷}$$

حالت ۱
کاربرد مستقیم *(*)* با (۱۷)، می‌باشد که طرح $A1$ را می‌دهد.

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda}\right)(y_n^2 + 2y_n + 1). \tag{۱۸}$$

حالت ۲
کاربرد مستقیم تابع مشتق‌کننده در (۱۵)، در کنار (۱۷)، و $A2$ را می‌دهد.

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{nh+\frac{1}{2}}{nh+h+\frac{1}{2}}\right](y_n^2 - 2y_n + 1). \tag{۱۹}$$

قانون ۳ با (۱۷) برای

$$y^2 \approx ay_n^2 + by_ny_{n+1}$$

$$y_{n+1}(1 - b\varphi y_n) = y_n + \varphi(ay_n^2 + by_ny_{n+1})$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \varphi(ay_n^2 + by_ny_{n+1})}{(1 + b\varphi y_n)} \tag{۲۰}$$

می‌باشد.
حالت ۳
کاربرد مستقیم *(*)* برای به دست آوردن (۲۰) طرح $A3$ را می‌دهد.

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \varphi(ay_n^2 + by_ny_{n+1})}{(1 - b\varphi y_n)}, \qquad \varphi = \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda}\right) \tag{۲۱}$$

حالت ۴
کاربرد $\varphi = h\left[\frac{nh+\frac{1}{2}}{nh+h+\frac{1}{2}}\right]$ با (۲۰)، طرح $A4$ را می‌دهد.

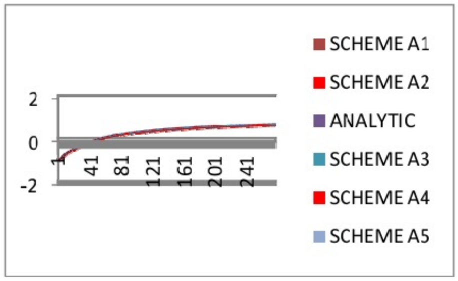
$$y_{n+1} = \frac{y_n + \varphi(ay_n^2 + by_ny_{n+1})}{(1 - b\varphi y_n)}, \qquad \varphi = h\left[\frac{nh+\frac{1}{2}}{nh+h+\frac{1}{2}}\right]. \tag{۲۲}$$

حالت ۵
$\varphi = h$ با معادله‌ی (۲۱)، طرح $A5$ را می‌دهد

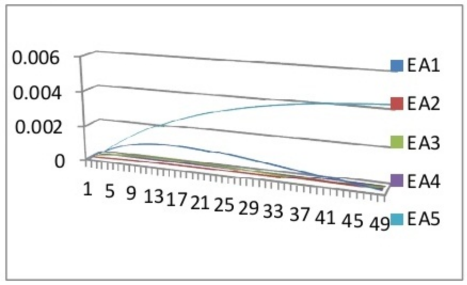
$$y_{n+1} = \frac{y_n + \varphi(ay_n^2 + by_ny_{n+1})}{(1 - b\varphi y_n)}, \qquad \varphi = h. \tag{۲۳}$$

۵. نتیجه‌گیری

این مقاله با طرح تفاضلی محدود غیراستاندارد برای راه حل مسائل مقدار ابتدایی توسعه و به عنوان نسبت دو چندجمله‌ای بیان می‌شود. با این تکنیک مشتق‌کننده‌ها هدایت و برای طرح مناسب یافت می‌شوند. ما εR مناسب که تابع مشتق‌کننده جدید برای هر مسئله مقداری ابتدایی متناسب می‌شود را می‌یابیم و قادر به ایجاد برخی توابع مشتق‌کننده مناسب هستیم.



شکل ۱: نمودار راه حل تحلیلی با راه حل‌های عددی با استفاده از طرح‌های $A1 - A5$ برای $y' = f(x,y) = (y-1)^2$ ، $y(0) = -1$



شکل ۲: خطای طرح مربوط به مثال ۱.۴

مراجع

[1] R. Anguelov and J. M. S. Lubuma, *Nonstandard finite difference method by nonlocal approximation, Mathematics and Computers in simulation*, **6** (2003), 465–475.

[2] E. A. Ibijola and A. A. Obayomi, *Numerical Schemes Based on Non-Standard Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Journal of Emerging Trends in Engineering and Applied Sciences (JETEAS) **3(1)** (2012a), 49–55.

[3] E. A. Ibijola and A. A. Obayomi, *A new family of numerical schemes for solving the combustion equation*, Journal of Emerging Trends in Engineering and Applied Sciences (JETEAS) **3(3)** (2012b), 387–393.

[4] R. E. Mickens, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore. (1994), 144–162.