با فرستادن این چکیده مبسوط به IMC44، تایید می‌کنم که
(۱) محتوی و اصیل بودن این مقاله بر عهده من و دیگر نویسندگان مقاله است
(۲) دیگر نویسندگان مقاله با فرستادن این مقاله به IMC44 موافق بوده‌اند.

نقش عملگرهای کراندار گرام در نظریه قابها روی فضای کرین

محمد الباجی [۱] * و عبدالمحمد فروزانفر [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی ، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر ، دانشگاه شهید چمران اهواز
Mohammad.albaji@yahoo.com
Am.forouzanfar@scu.ac.ir

چکیده. در این مقاله قاب ها را برای فضای کرین تعریف کرده و سپس به بیان نقش عملگرهای گرام کراندار در این حالت میپردازیم.

۱. پیش‌گفتار

قابها را میتوان به صورت پایه های فوق کامل در نظر گرفت به گونه ای که این خاصیت فوق کامل بوده ، آنها را بسیار انعطاف پذیر تر نسبت به پایه های متعامد یکه کرده است. قاب ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شیفر برای مطالعه برخی مسائل در زمینه آنالیز فوریه غیر هارمونیک معرفی شدند. [۵] و ۳۰ سال بعد در ۱۹۸۶ ، دوبشی ، گراسمان و میر در مقاله خود با عنوان [۴] Painless nonorthogonal expansions از قاب ها برای پیدا کردن بسط سری توابع در L2(R) شبیه به یافتن بسط توابع با پایه های متعامد یکه ، استفاده کردند. بعد از انتشار این مقاله مهم ، مقوله قابها به طور گسترده ای مورد بررسی قرار گرفت و به سرعت پیشرفت کرد. در این مقاله $(K,[.,.])$ معرف یک فضای کرین با تجزیه اساسی $K = K^+ \oplus K^-$ و تقارن اساسی J داده شده به صورت زیر است :

$$j(k^+ + k^-) = k^+ - k^- \ , \ k^+ + k^- \in K^+ \oplus K^- \qquad (۱.۱)$$

به طوری که $j-$ضرب داخلی زیر:

$$[h^+ + h^-, k^+ + k^-]_j = [h^+ + h^-, j(k^+ + k^-)] = [h^+, k^+] - [h^-, k^-], h^\pm, k^\pm \in K^\pm \qquad (۲.۱)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. قاب‌ها، فضای کرین، عملگر گرام .

* سخنران

فضای $(K,[.,.])$ را به یک فضای هیلبرت تبدیل میکند . توجه کنید که از (۱,۱) داریم $1=j^2$ اگر $\widetilde{K}$ و K فضاهای کرین با تقارن‌های اساسی J و $\widetilde{J}$ می‌باشد، $T:K\longrightarrow\widetilde{K}$ کراندار باشد که در آن K و $\widetilde{K}$ فضاهای کرین با تقارن‌های اساسی J و $\widetilde{J}$ می‌باشد، آنگاه عملگر خطی $T^{*\widetilde{J}}$ وجود دارد به طوری که: $[Tx,y]_{\widetilde{J}}=[x,T^{*\widetilde{J}}y]_J$. همچنین عملگر خطی $T^{[*]}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x\in K$ و $y\in\widetilde{K}$، $[Tx,y]_{\widetilde{\mathfrak{R}}}=[x,T^{[*]}y]_{\mathfrak{R}}$ و

$$[Tx,y]=[\widetilde{J}Tx,y]_{\widetilde{J}}=[Tx,\widetilde{J}y]_{\widetilde{J}}=[x,T^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}y]_J=[x,JT^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}y]$$

آنگاه $T^{[*]}=JT^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}$. عملگر خطی $T^{[*]}$ را عملگر الحاقی T در فضای کرین K گوییم. عملگر T را خودالحاقی گویند اگر $T=T^{[*]}$. عملگر T را $J-$ خودالحاقی گویند هرگاه $T=T^{*J}$. عملگر $U:\mathfrak{R}\longrightarrow\mathfrak{R}$ در فضای کرین را عملگر یکانی گویند هرگاه $UU^{[*]}=U^{[*]}U=I$.

۲. قاب‌ها روی فضای کرین

تعریف ۱.۲. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. مجموعه‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ یک قاب در این فضا تشکیل می‌دهد اگر ثابت‌های A,B وجود داشته باشند به طوری که:

$$A\|x\|^2\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x,x_n\rangle|^2\leq B\|x\|^2,\qquad\forall x\in H \tag{۱.۲}$$

اعداد A و B را کران‌های قاب می‌نامند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید H یک فضای هلبرت با ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ باشد عملگر خودالحاقی و کراندار $W:H\longrightarrow H$ را در نظر بگیرید. به سادگی ثابت می‌شود که نگاشت یک و نیم خطی هرمیتی زیر:

$$[\cdot,\cdot]=\langle W(\cdot),\cdot\rangle \tag{۲.۲}$$

یک ضرب داخلی نامعین روی H تعریف می‌کند که آن را $W-$ضرب داخلی می‌نامیم.

تعریف ۳.۲. عملگر خطی W که در رابطه (۲.۲) صدق کند را عملگر گرام گویند.

تعریف ۴.۲. فرض کنیم K یک فضای کرین باشد. مجموعه‌ی $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq K$ یک قاب در این فضا تشکیل می‌دهد اگر ثابت‌های A,B وجود داشته باشند به طوری که:

$$A\|k\|_J^2\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle k,k_n\rangle|^2\leq B\|k\|_J^2,\qquad\forall k\in K \tag{۳.۲}$$

اعداد A و B را کران‌های قاب می‌نامند.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم K یک فضای کرین با تقارن اساسی J باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با کران‌های $A,B>0$ یک قاب برای فضای کرین K است.
۲) $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با کران‌های $A,B>0$ یک قاب برای فضای کرین K است.
۳) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با کران‌های $A,B>0$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\big(K,[\cdot,\cdot]_J\big)$ است.
۴) $\{Jkn\}_{n\in\mathbb{N}}$ با کران‌های $A,B>0$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\big(K,[\cdot,\cdot]_J\big)$ است.

برهان. ۱$\Longleftarrow$۲:

$$A\|k\|_J^2=A\|Jk\|_J^2\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|[Jk,k_n]|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|[k,Jk_n]|^2\leq B\|Jk\|_J^2=B\|k\|_J^2,\ \forall k\in K.$$

۲⟸۳:

$$A\|k\|_J^۲ \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]|^۲ = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^۲ \leq B\|k\|_J^۲, \ \forall k \in K.$$

۳⟸۴:

$$A\|k\|_J^۲ = A\|Jk\|_J^۲ \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[Jk, k_n]_J|^۲ = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]_J|^۲ \leq B\|Jk\|_J^۲ = B\|k\|_J^۲, \ \forall k \in K.$$

۴⟸۱:

$$A\|k\|_J^۲ \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]_J|^۲ = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^۲ \leq B\|k\|_J^۲, \ \forall k \in K.$$

□

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم K و $\widetilde{K}$ به ترتیب فضاهای کرین با تقارن‌های اساسی J و $\widetilde{J}$ باشند. اگر $V : \left(K, [\cdot,\cdot]_J\right) \longrightarrow \left(\widetilde{K}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$ یک عملگر یکانی باشد، آنگاه $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب با کران‌های A و B روی K است اگر و تنها اگر $\{Vk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب با کران‌های A و B روی $\widetilde{K}$ باشد.

برهان. فرض کنیم $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب روی K باشد. بنابراین برای هر $k \in \widetilde{K}$ داده شده، داریم:

$$\begin{aligned} A\|k\|_{\widetilde{J}}^۲ &= A\|JV^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}k\|_J^۲ = A\|V^{[*]}k\|_J^۲ \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left[V^{[*]}k, k_n\right]\right|^۲ = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(k, Vk_n)|^۲ \\ &\leq B\|V^{[*]}k\|_J^۲ = B\|k\|_{\widetilde{J}}. \end{aligned}$$

برعکس: اثبات حالت عکس نیز با تغییر V و $V^{[*]}$ شبیه حالت قبل است. □

تعریف ۷.۲. هرگاه $\sigma(W)$ معرف طیف عملگر W باشد، آنگاه یک $W-$ضرب داخلی را منظم گوییم هرگاه $\circ \notin \sigma(W)$ و نامنظم گوییم هرگاه $\circ \in \sigma(W)$.

۳. قاب ها در فضای کرین نامنظم

حالت اول: $W \in B(H)$ عملگر گرام است به طوری که $W > \circ$:

عملگر گرام خوداحاقی $\sqrt{W} : H \subset H_W \longrightarrow H$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\|\sqrt{W}k\|^۲ = \langle\sqrt{W}k, \sqrt{W}k\rangle = \langle k, Wk\rangle = \|k\|_J^۲.$$

که نشان می‌دهد $\sqrt{W}$ یک تقارن است. لذا تعمیم $\widehat{\sqrt{W}} : H_W \longrightarrow H$ وجود دارد، که یک تقارن است. بنابراین دامنه‌ی $(\widehat{\sqrt{W}}) \subset H$ بسته است. با این حال:

$$\left(\widehat{\sqrt{W}}\Big|_H\right) = (\widehat{\sqrt{W}}) \subset H \quad \text{و} \quad \overline{(\sqrt{W})} = (\ker\sqrt{W})^{\perp} = H.$$

بنابراین $(\widehat{\sqrt{W}}) = H$ چگال و بسته است. چون $\ker(\sqrt{W}) = \{\circ\}$، پس $\widehat{\sqrt{W}}$ یک تابع دوسویی از H_W به H خواهد بود. پس عملگر خطی داده شده‌ی زیر:

$$U = (\widehat{\sqrt{W}})^{-۱} : H \longrightarrow H_W \tag{۱.۳}$$

خوش‌تعریف و یکانی است. پس قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱.۳. فرض کنیم W یک عملگر گرام کراندار باشد به طوری که $W > 0$. اگر U عملگر خطی داده شده در (۱.۳)، باشد، آنگاه:

۱) اگر $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ یک قاب روی H باشد، آنگاه $\{Uk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ یک قاب روی فضای کرین H_W خواهد بود.

۲) اگر $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ یک قاب روی فضای کرین H_W باشد، آنگاه $\{U^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ یک قاب روی فضای هیلبرت H خواهد بود.

برهان. چون U و U^{-1} دو عملگر یکانی هستند، اثبات (۱) و (۲) طبق نتیجه‌ی ۶.۲ و قضیه‌ی ۵.۲، برقرارند. □

حالت دوم: $W \in B(H)$ عملگر گرام است به طوری که $0 \in \sigma(W) \subset [-\|W\|, \|W\|]$:

چون $|W| > 0$، پس عملگر خودالحاقی $G : \mathcal{D}_G = H \subset H_W \longrightarrow H$ وجود دارد به طوری که:

$$G := \sqrt{|W|}. \tag{۲.۳}$$

بنابراین،

$$\|Gk\|^2 = \langle Gk, Gk\rangle = \langle k, G^2 k\rangle = \langle k, |W|k\rangle = \|k\|_J^2, \tag{۳.۳}$$

بنابراین G یک تقارن است. به طور مشابه در حالتی که عملگر گرام مثبت باشد. تعمیم آن یعنی $\widehat{G} : H_W \longrightarrow H$ یک عملگر یکانی است. در نتیجه عملگر $V \in B(H, H_W)$ داده شده در زیر

$$V = \widehat{G}^{-1} : H \longrightarrow H_W \tag{۴.۳}$$

خوش‌تعریف و یکانی است. پس قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $W \in B(H)$ یک عملگر گرام باشد به طوری که $0 \in \sigma(W)$. اگر V عملگر خطی داده شده در (۴.۳) باشد، آنگاه:

۱) اگر $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ یک قاب باشد، آنگاه $\{Vk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب روی فضای کرین نامظم H_W است.

۲) اگر $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب روی فضای کرین نامنظم H_W باشد، آنگاه $\{V^{-1}f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب روی فضای هیلبرت H خواهد بود.

برهان. چون V و V^{-1} عملگر یکانی هستند، اثبات (۱) و (۲) در نتیجه‌ی ۶.۲ و قضیه‌ی ۵.۲، برقرارند. □

مراجع

1. Azizov T. Ya., Iokhvidov I.S., Linear operators in Hilbert spaces with G-metric. Russ. Math. Surv. 26 (1971), 45-97.
2. Azizov T. Ya. and Iokhvidov I.S. Linear operator in spaces with an indefinite metric. PureApplied Mathematics,A Wiley-Intersciences, Chichester, 1989.
3. Bognar, J., Indefinite inner product spaces. Springer, Berlin, 1974.
4. Daubechies, I., Grossmann, A., Meyer, Y., Painless nonorthogonal expansions. J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.
5. Duffin R.J. Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.