چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۱۳-۱۲اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه کسری با استفاده از توابع مثلثی

محمد تقی خداداد [۱] * و سید سعید اتابک [۲]

[۱] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
khodadad44@gmail.com
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
ssatabak@gmail.com

چکیده. در این مقاله دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه کسری را با استفاده از توابع مثلثی حل می‌کنیم. در این روش، با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی توابع مثلثی دستگاه اولیه را به یک دستگاه جبری از معادلات خطی تبدیل کرده و آنگاه با حل آن جواب تقریبی مسأله را به دست می‌آوریم.

۱. مقدمه

برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری، در سال‌های اخیر تلاش‌هایی صورت گرفته و روش‌های عددی مختلفی ارائه گردیده است. به عنوان مثال، در [۱] چن و همکاران از موجک‌های لژاندر و در [۲] جعفری و همکارش از روش تجزیه آدومیان برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیر خطی استفاده کرده‌اند. در این مقاله با استفاده از توابع مثلثی به حل دستگاه زیر از معادلات دیفرانسیل کسری می‌پردازیم.

$$D^{\alpha_i}u_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j(t)+f_i(t),\quad 1\le i\le n,\ k_i-1<\alpha_i\le k_i, \tag{۱.۱}$$

$$u_i^{(s)}(0)=b_{is},\quad s=0,1,\dots,k_i-1,\quad k_i\in\mathbb{N},\quad t\in[0,1] \tag{۲.۱}$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary MSC41.
واژگان کلیدی. دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری، توابع مثلثی، انتگرال کسری ریمان-لیوویل، مشتق کاپوتو، ماتریس عملیاتی .

* سخنران

که در آن $D^{\alpha_i}u_i(t)$ مشتق کسری تابع $u_i(t)$ از مرتبه α_i از نوع کاپوتو است، a_{ij}ها و b_{is}ها ثابت‌های حقیقی‌اند. مشتق کسری کاپوتوی تابع $f(t)$ از مرتبه α ، $k-1<\alpha\leq k$ ، به صورت

$$D^{\alpha}f(t)=I^{k-\alpha}D^{k}f(t)=\frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\theta)^{k-\alpha-1}f^{(k)}(\theta)d\theta$$

تعریف می‌شود، که در آن I^{β} عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل نامیده می‌شود.

۲. روش عددی برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری

در این بخش به بیان روش عددی برای حل دستگاه (۱.۱) با شرایط اولیه‌ی (۲.۱) می‌پردازیم. بازه‌ی $[0,1)$ را به m قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $h=\frac{1}{m}$. توابع مثلثی را به صورت

$$T1_i(t)=\begin{cases}1-\frac{t-ih}{h} & ih\leq t<(i+1)h\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases},\quad T2_i(t)=\begin{cases}\frac{t-ih}{h} & ih\leq t<(i+1)h\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

معرفی می‌کنیم. فرض کنید $v_1(t)$،...،$v_n(t)$ توابع معلومی باشند که در شرایط اولیه (۲.۱) صدق می‌کنند. توابع $x_1(t)$،...،$x_n(t)$ را چنان می‌یابیم که بردار $(u_1(t),\ldots,u_n(t))^T$ جواب دستگاه (۱.۱) باشد، که در آن

$$u_i(t)=v_i(t)+x_i(t)\ ,\quad 1\leq i\leq n. \qquad (۱.۲)$$

با جایگذاری $u_i(t)$ در (۱.۱) و ساده سازی به دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی

$$D^{\alpha_i}x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+g_i(t),\ \ 1\leq i\leq n,\ k_i-1<\alpha_i\leq k_i, \qquad (۲.۲)$$

$$x_i^{(s)}(0)=0,\ \ s=0,1,\ldots,k_i-1,\ \ k_i\in\mathbb{N},\ \ t\in[0,1] \qquad (۳.۲)$$

می رسیم. برای حل (۲.۲)، اگر از طرفین آن انتگرال کسری I^{α_i} بگیریم، دستگاه

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}I^{\alpha_i}(x_j(t))+I^{\alpha_i}g_i(t),\qquad 1\leq i\leq n \qquad (۴.۲)$$

بدست می‌آید. بسط توابع $x_i(t)$، $g_i(t)$، $1\leq i\leq n$، را برحسب توابع مثلثی به صورت

$$x_i(t)=C_i^{T}T1(t)+D_i^{T}T2(t),\ \ g_i(t)=C_{0i}^{T}T1(t)+D_{0i}^{T}T2(t) \qquad (۵.۲)$$

در نظر بگیرید. لازم به ذکر است که بسط تابع $f(t)$ برحسب توابع مثلثی به صورت

$$f(t)=C^{T}T1(t)+D^{T}T2(t)$$

می باشد که در آن

$$C^T=[c_0,c_1,\ldots,c_{m-1}]\ ,\ \ D^T=[d_0,d_1,\ldots,d_{m-1}]$$
$$T1(t)=[T1_0(t),\ldots,T1_{m-1}(t)],\ \ T2(t)=[T2_0(t),\ldots,T2_{m-1}(t)]$$

و $c_j=f(jh)$، $d_j=f((j+1)h)$، $0\le j\le m-1$. در این صورت، داریم [۳]،

$$I^\alpha f(t)=(C^TP_1^\alpha+D^TP_3^\alpha)T1(t)+(C^TP_2^\alpha+D^TP_4^\alpha)T2(t) \qquad (6.2)$$

که در آن P_1^α، P_2^α، P_3^αو P_4^α ماتریس های عملیاتی توابع مثلثی نامیده می‌شوند و از دستور

$$P_1^\alpha=a\begin{bmatrix}0&\zeta_1&\zeta_2&\zeta_3&\cdots&\zeta_{m-1}\\0&0&\zeta_1&\zeta_2&\cdots&\zeta_{m-2}\\0&0&0&\zeta_1&\cdots&\zeta_{m-3}\\\vdots&0&\ddots&0&\ddots&\vdots\\0&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\zeta_1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\ ,\quad P_2^\alpha=a\begin{bmatrix}\zeta_1&\zeta_2&\zeta_3&\zeta_4&\cdots&\zeta_m\\0&\zeta_1&\zeta_2&\zeta_3&\cdots&\zeta_{m-1}\\0&0&\zeta_1&\zeta_2&\cdots&\zeta_{m-2}\\\vdots&0&\ddots&0&\ddots&\vdots\\0&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\zeta_2\\0&0&0&0&0&\zeta_1\end{bmatrix}$$

$$P_3^\alpha=a\begin{bmatrix}0&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\cdots&\xi_{m-1}\\0&0&\xi_1&\zeta_2&\cdots&\xi_{m-2}\\0&0&0&\xi_1&\cdots&\xi_{m-3}\\\vdots&0&\ddots&0&\ddots&\vdots\\0&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\xi_1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\ ,\quad P_4^\alpha=a\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3&\xi_4&\cdots&\xi_m\\0&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\cdots&\xi_{m-1}\\0&0&\xi_1&\xi_2&\cdots&\xi_{m-2}\\\vdots&0&\ddots&0&\ddots&\vdots\\0&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\xi_2\\0&0&0&0&0&\xi_1\end{bmatrix}$$

محاسبه می‌شوند که در آن برای $1\le j\le m$، $\zeta_j=j^\alpha(1+\alpha-j)+(j-1)^{\alpha+1}$ و $\xi_j=j^{\alpha+1}-(j+\alpha)(j-1)^\alpha$ و $a=\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}$ می‌باشد. اکنون با جایگذاری بسط توابع $x_i(t)$، $I^{\alpha_i}x_j(t)$ و $I^{\alpha_i}g_i(t)$، $1\le i,j\le n$، برحسب توابع مثلثی (معادلات (۵.۲) و (۶.۲)) در دستگاه (۴.۲) به یک دستگاه جبری از معادلات خطی می‌رسیم، که با حل آن جواب تقریبی دستگاه (۲.۲) با شرایط اولیه‌ی (۳.۲) به دست می‌آید. سپس از رابطه (۱.۲) جواب تقریبی دستگاه (۱.۱) با شرایط اولیه‌ی (۲.۱) را می‌توان به دست آورد.

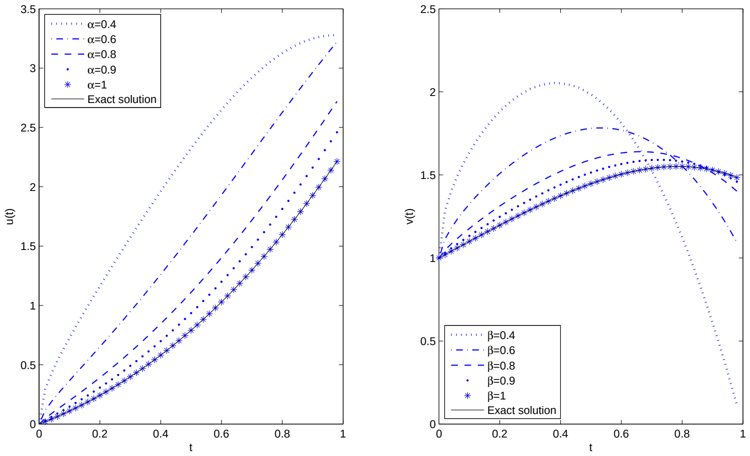
۳. مثال عددی

در این بخش برای نشان دادن کاربرد روش ارائه شده در بخش قبل، به بیان و حل یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری

$$\begin{cases}D^\alpha u(t)=u(t)+v(t),\\D^\beta v(t)=-u(t)+v(t),\end{cases} \qquad (1.3)$$

را با شرایط اولیه $u(0)=0$ و $v(0)=1$ در نظر بگیرید، که در آن α و β، به ترتیب، مرتبه مشتق کسری $u(t)$ و $v(t)$ می‌باشند و $0<\alpha,\beta\le 1$. جواب دستگاه (۱.۳) وقتی که $\alpha=\beta=1$ به صورت $u(t)=e^tsin(t)$ و $v(t)=e^tcos(t)$ می‌باشد. این دستگاه را با روش بیان شده در بخش قبل حل کرده‌ایم. وقتی که $\alpha=\beta=1$، در جدول ۱ ماکزیمم خطای مطلق بین جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای mهای مختلف نشان داده شده است. همچنین،



شکل ۱. جواب های عددی برای مقادیر مختلف α و β

شکل ۱ رفتار جواب‌های تقریبی را برای مقادیر مختلف α و β نشان می‌دهد.

جدول ۱. ماکزیمم خطای مطلق وقتی که $\alpha=\beta=۱$

m	خطای $u(t)$	خطای $v(t)$
۱۰	۰,۰۰۴۲	۰,۰۱۱۰
۲۰	۰,۰۰۱۱	۰,۰۰۲۹
۲۵	۶,۷۶۶۵e-۴	۰,۰۰۱۹
۵۰	۱,۶۹۳۵e-۴	۴,۷۰۹۸e-۴
۱۰۰	۴,۲۳۴۶e-۵	۱,۱۸۷۶e-۴

مراجع

1. Y. Chen, X. Ke, and Y. Wei. *Numerical algorithm to solve system of nonlinear fractional differential equations based on wavelets method and the error analysis*, Appl. Math. Comput. 251 (2015), 475-488.
2. H. Jafari and V. Daftardar-Gejji, *Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition*, J. Math. Anal. Appl. 196 (2006), 644–651.
3. K. Maleknejad, and M. Asgari, *The construction of operational matrix of fractional integration using triangular functions*, Appl. Math. Model. 39.3 (2015), 1341-1351.