چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۱۳-۱۲اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

الگوریتمی برای حل معادلات انتگرالی غیرخطی

محمد علی پرتانیان [۱] * و جاسم محمدی چاه‌دادخدا [۲]

[۱] *گروه ریاضی کاربردی،دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری*
partanian@hsu.ac.ir
[۲] *کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری*
mohammadijasem1368@gmail.com

چکیده. در این مقاله حل معادلات انتگرالی غیر خطی را با روش آدومیان و روش خطی سازی مورد بررسی قرار می دهیم. با استفاده از نرم افزار $maple$ و ارائه یک مثال دقت و سادگی روش ها با یکدیگر مقایسه می گردد. سپس نشان خواهیم داد که دقت روش آدومیان بیشتر است. ویژگی مقاله حاضر در این است روش خطی سازی در حالت کلی ارائه و برای تابع انتگران خاص صورت پذیرفته و کاری جدید و کاربردی در حل مسائل و برنامه نویسی و الگوریتم ها بشمار می آید.

۱. پیش‌گفتار

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های آنالیز تابعی می باشد. اصولاً اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. روش های مختلفی برای حل انواع معادله های غیرخطی ارائه شده است [۱، ۲]. معادله انتگرالی زیر را در نظر می گیریم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)H(y(t))dt \tag{۱.۱}$$

، که در آن $y(x)$ تابع مجهول و a یک ثابت حقیقی و هسته $k(x,t)$ تحلیلی روی R^2 و $f(x)$ تحلیلی روی R و λ پارامتر حقیقی (مختلط) است و اگر λ حقیقی باشد یک مقدار ویژه است. و H تابع غیر خطی از y می باشد [۴].

واژگان کلیدی. روش آدومیان ، روش خطی سازی،همگرایی، معادلات انتگرالی .
2010 Mathematics Subject Classification. Primary MSC45.

* سخنران

۲. روش تجزیه آدومیان

معادله‌ی (۱.۱) یک معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع دوم غیرخطی است. در روش آدومیانy را به صورت$\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ تجزیه کرده و فرض می کنیم

$$y = Lim_{k\to\infty}\{\sum_{n=0}^{k} y_n\}$$

و قرار می دهیم $y_0 = f(x)$، $H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ و A_n ها چند جمله‌ای های آدومیان هستند که بایستی محاسبه شوند [۲]. با جایگزین کردن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \qquad H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

در معادله (۱.۱) خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = f(x) + \lambda \int_a^x (k(x,t)\sum_{n=0}^{\infty} A_n)dt$$

و لذا فرمول بازگشتی

$$\begin{cases} y_0 = f(x) \\ y_{n+1} = \lambda \int_a^x (k(x,t)\sum_{n=0}^{\infty} A_n)dt \end{cases}$$

نتیجه می شود. سپس چند جمله ای های آدومیان را بصورت زیر معرفی می کنیم

$$\begin{cases} A_0 = H(y_0) \\ A_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}(H(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^i y_i)), \qquad \lambda = 0 \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

۳. روش خطی سازی

برای بدست آوردن جواب عددی (۱.۱) قرار می دهیم $K(x,t,y(t)) = k(x,t)H(y(t))$ و در دامنه $T = [a,\infty[$ بازه ی $[a,b) \subseteq T$ را به زیر بازه های $[x_n, x_{n+1}]$ تقسیم می کنیم. در هر زیر بازه $K(x,t,y(t))$ می تواند به وسیله ی سه جمله اول بسط تیلور حول نقطه ی(x_n,t_n,y_n) به فرم زیر تقریب زده شود [۳].

(۱.۳)

$$K(x,t,y) = K(x_n,t_n,y_n) + (x-x_n)\frac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial x} + (t-t_n)\frac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial t} + (y-y_n)\frac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial y}$$

قرار می دهیم:

$$\begin{cases} y(x_n) = y_n \quad , \quad K_n = k(x_n,t_n,y_n) \quad , \quad J_n = \dfrac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial x} \\ Q_n = \dfrac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial t} \quad , \quad Z_n = \dfrac{\partial K(x_n,t_n,y_n)}{\partial y} \end{cases}$$

با جایگزینی و محاسبه در معادله (۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda[K_n + (x - x_n)J_n - y_n Z_n](x-a) \\ &+ \frac{\lambda}{2}[(x-t_n)^2 - (a-t_n)^2)Q_n + \lambda Z_n \int_a^x y(t)dt. \end{aligned}$$

پس از مشتق گیری از رابطه فوق خواهیم داشت

$$y'(x) - \lambda Z_n y(x) = f'(x) + \lambda[K_n + (2x - x_n - a)J_n y_n Z_n + Q_n(x - t_n)].$$

معادله بدست آمده معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است؛ پس از حل و جایگذاری $y(x_\circ) = y_\circ$، $\Delta x_n = h$ و $x_n = x_\circ + nh$ و $n = 0, 1, 2, \ldots$ ،$x = x_{n+1}$
رابطه بازگشتی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f_{n+1} + \lambda Z_n e^{(\lambda Z_n x_{n+1})} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) e^{(-\lambda Z_n t)} \\ &- \frac{1}{Z_n}\{K_n + [\Delta x_n + (x_{n+1} - x_\circ) + \frac{2}{\lambda Z_n}]J_n + (h + \frac{1}{\lambda Z_n})Q_n\} \\ &+ e^{(-\lambda Z_n h}\{\frac{1}{Z_n}[K_n + (nh + \frac{2}{\lambda Z_n})J_n + (\frac{1}{\lambda Z_n})Q_n] - f(x_n)\}. \end{aligned}$$

مثال ۱.۳. *معادله انتگرالی ولترای غیر خطی*

$$y(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) + \int_\circ^x y^2(t)dt, \qquad x \in [\circ, 1]$$

که جواب تحلیلی آن $y(x) = e^x$ است را در نظر می‌گیریم. دو روش از نظر عددی بررسی و نتایج بدست آمده در جداول زیر آورده، که قابل بررسی و مقایسه باشند. در طول گام ۰٫۱ خطا و خطای نسبی روش آدومیان نسبت به روش خطی سازی کمتر بوده است. لذا روش خطی سازی در مقایسه با روش آدومیان از خطای بیشتر و دقت کمتری برخوردار است. با توجه به روش فوق و اینکه جملات را می توان در هر مرحله اضافه کرد لذا فقط تا مرحله دوازدهم جملات محاسبه شده است.

جدول ۱: جواب ها

گره	جواب واقعی	جواب آدومیان	جواب خطی سازی
۰	۱	۱	۱
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷۱	۱٫۱۰۵۱۷۱	۱٫۱۰۴۷۹۳
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰۳	۱٫۲۲۱۴۰۲	۱٫۲۲۰۴۶۳
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۵۹	۱٫۳۴۹۸۶۰	۱٫۳۴۸۰۷۶
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲۵	۱٫۴۹۱۸۱۶	۱٫۴۸۸۷۶۱
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲۱	۱٫۶۴۸۵۷۵	۱٫۶۴۳۶۷۹
۰٫۶	۱٫۸۲۲۱۱۹	۱٫۸۲۰۶۱۵	۱٫۸۱۳۹۵۳
۰٫۷	۲٫۰۱۳۷۵۲	۲٫۰۰۳۹۱۸۵	۲٫۰۰۰۵۲۴
۰٫۸	۲٫۲۲۵۵۴۱	۲٫۱۷۸۸۵۰	۲٫۱۰۳۸۵۳
۰٫۹	۲٫۴۵۹۶۰۳	۲٫۲۸۹۸۲۲	۲٫۲۲۳۲۷۰
۱	۲٫۷۱۸۲۸۲	۲٫۳۷۳۹۰	۲٫۳۵۵۵۶۹

جدول ۲: خطا ها

گره	خطای خطی	خطای نسبی خطی	خطای نسبی آدومیان	خطای آدومیان
۰	۰	۰	۰	۰
۰٫۱	۰٫۰۰۰۳۷۸	۰٫۰۰۳۴۲	۰	۰
۰٫۲	۰٫۰۰۰۹۴۰	۰٫۰۰۰۷۷۰	۴٫۳۹۶۵۸۴$e-$۷	۵٫۳۷$e-$۷
۰٫۳	۰٫۰۰۱۷۸۳	۰٫۰۰۱۳۲۱	۷٫۷۴۸۹۵۹$e-$۷	۱٫۰۴۶$e-$۶
۰٫۴	۰٫۰۰۳۰۶۴	۰٫۰۰۲۰۵۴	۰٫۰۰۶۱۸۵$e-$۵	۱٫۰۴۵۲$e-$۵
۰٫۵	۰٫۰۰۵۰۴۲	۰٫۰۰۳۰۵۸	۸٫۶۷۹۶۹۶$e-$۵	۱٫۴۳۱۰۴$e-$۴
۰٫۶	۰٫۰۰۸۱۶۶	۰٫۰۰۴۴۸۲	۸٫۳۱۷۵۲۰$e-$۴	۰٫۰۰۱۵۱۵۵۵
۰٫۷	۰٫۰۱۳۲۲۸	۰٫۰۰۶۵۶۹	۰٫۰۰۴۸۵۷۴۳	۰٫۰۰۹۸۳۴
۰٫۸	۰٫۱۲۱۶۸۸	۰٫۰۵۴۶	۰٫۰۲۱۰۷۸	۰٫۰۴۶۶۹۱
۰٫۹	۰٫۲۳۶۴۰۳	۰٫۰۹۶۱۱۳۲	۰٫۰۶۹۰۶	۰٫۱۶۹۷۸
۱	۰٫۳۶۲۷۱۳	۰٫۱۳۳۴۳۴	۰٫۱۲۹۵۳	۰٫۳۴۴۳۸۲

۴. نتایج اصلی

دو روش تجزیه آدومیان و خطی سازی را از نظر عددی باهم مقایسه، و در نتیجه روش تجزیه آدومیان در مقایسه با روش خطی سازی از قابلیت اجرا، صحت و دقت بیشتری برخور دار است؛ زیرا خطا و خطای نسبی روش آدومیان در مقایسه با روش خطی سازی کمتر است. لازم به ذکر است که همگرایی روش تجزیه آدومیان به نقطه اولیه y_0 بستگی دارد.همچنین در روش خطی سازی چنانچه طول گام بزرگ انتخاب شود روش واگرا خواهد بود. از طرفی روش خطی سازی حالت کلی تابع انتگران را در بر دارد که در روش آدومیان حالت خاص انتگران در نظر گرفته می شود. لذا برتری روش خطی سازی کلی بودن تابع انتگران می باشد.

مراجع

1. Jerri, A J. *Introduction to integral equations with applications.* Mar. Cel New York, 1985.
2. Wazwaz, A-M. *Linear and nonlinear integral equations methods and applications.* Saint Xavier University Chicago, IL 60655, 2011.
3. Darania. P, Ebadian. A, Oskoi. A. *Linearization method for solving non linear integral equations.* Mathematical Problems in Engineering, 73714:1–10, 2006
4. Fawzi, Abdelwahid. *Adomian decomposition method applied to nonlinear integral equations.* Alexandria Journal of Mathematics, 1:11–18, 2010.