چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۱۲-۱۳اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

# مقایسه روش های آدومیان نوین و کلاسیک برای مسأله مقدار اولیه منفرد لن-امدن

محمد علی پرتانیان [۱] و جاسم محمدی چاه‌دادخدا [۲]*

[۱] گروه ریاضی کاربردی،دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
*partanian@hsu.ac.ir*
[۲] کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
*mohammadijasem1368@gmail.com*

چکیده. در این مقاله حل مسأله مقدار اولیه منفرد لن-امدن [۱]؛ با روش های آدومیان کلاسیک و نوین مورد بررسی قرار می دهیم. و به معرفی نتیجه ی بدست آمده به وسیله ی کاربرد روش آدومیان کلاسیک برای مسأله ی اولیه منفرد غیر خطی می پردازیم. سپس با ارائه ی مثالی عددی نشان می دهیم نتیجه ی بدست آمده با روش آدومیان نوین نسبت به روش کلاسیک از دقت و سرعت همگرایی بیشتری برخوردار است. ضرورت اجرای پژوهش این است که نشان دهیم روش آدومیان نوین نسبت به روش آدومیان کلاسیک دقت و سرعت همگرایی بیشتری دارد.

## ۱. پیش‌گفتار

روش تجزیه‌ی آدومیان ابتدا توسط آدومیان معرفی؛ و از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۹۰، زمانی که رئیس مرکز ریاضیات کاربردی در دانشگاه جورجیا بود روش را توسعه داد؛ و روشی نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی منفرد و نامنفرد، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی ارائه کرد [۱، ۲]. از جنبه‌های مهم روش آدومیان، بکارگیری چند جمله‌ای‌های آدومیان برای همگرایی جواب قسمت غیرخطی معادله، بدون خطی سازی می باشد. در این مقاله نیز روش آدومیان نوین [۳] را برای حل مسأله مقدار اولیه منفرد از معادلات دیفرانسیل معمولی بکار می بریم. به عنوان مثال

$$\begin{aligned} &y'' + \frac{۲}{x}y' + f(x,y) = g(x), \qquad ۰ < x \leq ۱ \\ &y(۰) = A, y'(۰) = B \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

واژگان کلیدی. همگرایی، روش آدومیان کلاسیک،روش آدومیان نوین.
2010 Mathematics Subject Classification. Primary MSC39.

* سخنران

که $A$ و $B$ اعداد ثابت می باشند را مورد بررسی قرار می دهیم. در اینجا با توجه به بالاترین مرتبه مشتق موجود در مسأله عملگری را تعریف می کنیم.

## ۲. حل مسأله ی لن-امدن به روش کلاسیک

فرض می کنیم $L = \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}$ و $L^{-۱}(.) = \int_{\circ}^{x}\int_{\circ}^{x}(.)$. در این صورت با توجه به معادله (۱.۱) می توان نوشت

$$Ly = g(x) - \frac{۲}{x}y' - f(x,y). \qquad (۱.۲)$$

با اثر دادن عملگر معکوس $L^{-۱}$ بر رابطه (۱.۲) خواهیم داشت

$$\begin{array}{l} y(x) = A + Bx + L^{-۱}(g(x)) - L^{-۱}(\frac{۲}{x}y') - L^{-۱}(f(x,y)) \\ y(\circ) = A, \qquad y'(\circ) = B. \end{array} \qquad (۲.۲)$$

بنا به روش تجزیه ی آدومیان، $y(x)$ و تابع غیر خطی $f(x,y)$ را بصورت

$$y(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} y_n, \qquad f(x,y) = \sum_{n=\circ}^{\infty} A_n(y_\circ, y_۱, y_۲, ..., y_n). \qquad (۳.۲)$$

تعریف کرده [۳]، که در آن $A_n$ ها چند جمله ای های آدومیان و بر طبق الگوریتم خاصی براساس روش تجزیه ی آدومیان بطور بازگشتی ساخته می شوند. پس از جایگزین کردن (۳.۲) در (۲.۲) داریم

$$\begin{array}{l} \sum_{n=\circ}^{\infty} y_n = A + Bx + L^{-۱}(g(x)) - L^{-۱}(\frac{۲}{x}\sum_{n=\circ}^{\infty} y'_n) \\ \qquad -L^{-۱}(\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n(y_\circ, y_۱, y_۲, ..., y_n)). \end{array}$$

برای یافتن جمله های $y_n(x)$ از رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} y_\circ = A + Bx + L^{-۱}(g(x)) \\ y_{n+۱} = -L^{-۱}(\frac{۲}{x}y'_n) - L^{-۱}(A_n), \qquad n \geq \circ. \end{cases}$$

استفاده می کنیم. که $A_n$ ها برای تابع غیر خطی $f(x,y)$ با توجه به رابطه

$$A_n = \frac{۱}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}(F(\sum_{n=\circ}^{\infty}\lambda^n y_n))$$

حاصل خواهد شد [۴] . پس از محاسبه مشتق های موجود، $\lambda$ را برابر صفر قرار می دهیم.

## ۳. حل مسأله ی لن-امدن به روش نوین

معادله ی (۱.۱) را بصورت

$$Ly = -f(x,y) + g(x). \qquad (۱.۳)$$

عملگر $L$ را بصورت

$$L = x^{-۲}\frac{d}{dx}(x^{۲}\frac{d}{dx})$$

و $L^{-1}$ رابصورت

$$L^{-1} = \int_{0}^{x} x^{-2} \int_{0}^{x} x^{2} dx dx$$

تعریف می کنیم. $L^{-1}$ را بر (۱.۳) اثر داده و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y(x) &= A + L^{-1} g(x) - L^{-1} f(x,y) \\ y(0) &= A. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

بنا به روش تجزیه ی آدومیان، $y(x)$ و تابع غیر خطی $f(x,y)$ را بصورت

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \qquad , \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, y_2, ..., y_n). \tag{۳.۳}$$

تعریف کرده [۳]. که در آن $A_n$ ها چند جمله ای های آدومیان و بر طبق الگوریتم خاصی براساس روش تجزیه ی آدومیان بطور بازگشتی ساخته می شوند. پس از جایگزین کردن (۳.۳) در (۲.۳) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + L^{-1} g(x) - L^{-1} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, y_2, ..., y_n)).$$

و روابط بازگشتی

$$\begin{cases} y_0 = A + L^{-1} g(x) \\ y_{n+1} = -L^{-1}(A_n), \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

نتیجه خواهد شد.

**مثال ۱.۳.** *مسأله مقدار اولیه منفرد همگن غیر خطی زیر را در نظر بگیرید.*

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x} y' + 4(2e^{y} + e^{\frac{y}{2}}) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad , \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

*در مثال فوق دو روش را از نظر عددی بررسی و نتایج بدست آمده در جدول (۱) و (۲) آورده شده است. در جدول (۱) جواب و اختلاف جواب ها برای هر دو روش درج و از آنجا که روش آدومیان نوین در بازه مورد نظر دقیقاً همان جواب واقعی می باشد لذا نیازی به مقایسه در جدول نمی باشد. در جدول (۲) خطا و خطای نسبی با توجه به جواب واقعی محاسبه شده است. خطای نسبی روش آدومیان نوین در بازه ی مورد نظر صفر می باشد. لذا روش آدومیان نوین در مقایسه با روش آدومیان کلاسیک از خطای کمتر و سرعت بالاتری برخوردار بوده است. با توجه به روش فوق و اینکه جملات را می توان در هر مرحله اضافه کرد. لذا فقط تا مرحله پنجم جملات را در این دو روش بدست آورده شده است.*

جدول ۱: جواب ها و اختلاف جواب ها

| گره | جواب آدومیان کلاسیک | جواب آدومیان نوین | جواب واقعی | اختلاف کلاسیک و نوین |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰/۰۱ | −۰/۰۰۰۲۰۰ | −۰/۰۰۰۲۰۰ | −۰/۰۰۰۲۰۰ | ۰ |
| ۰/۰۲ | −۰/۰۰۲۳۹۹ | −۰/۰۰۸۰۰ | −۰/۰۰۸۰۰ | ۰/۰۰۱۵۹۹ |
| ۰/۰۳ | −۰/۰۰۵۳۹۶ | −۰/۰۰۱۷۹۹ | −۰/۰۰۱۷۹۹ | ۰/۰۰۳۵۹۷ |
| ۰/۰۴ | −۰/۰۰۹۵۸۷ | −۰/۰۰۳۱۹۷ | −۰/۰۰۳۱۹۷ | ۰/۰۰۶۳۸۹ |
| ۰/۰۵ | −۰/۰۱۴۹۶۹ | −۰/۰۰۴۹۹۴ | −۰/۰۰۴۹۹۴ | ۰/۰۰۹۹۷۵ |
| ۰/۰۶ | −۰/۰۲۱۵۳۶ | −۰/۰۰۷۱۸۷ | −۰/۰۰۷۱۸۷ | ۰/۰۰۱۴۳۵ |
| ۰/۰۷ | −۰/۲۹۲۸۱ | −۰/۰۰۹۷۷۶ | −۰/۰۰۹۷۷۶ | ۰/۰۱۹۵۰۵ |
| ۰/۰۸ | −۰/۰۳۸۱۹۷ | −۰/۰۰۹۷۷۶ | −۰/۰۰۹۷۷۶ | ۰/۰۲۵۴۳۸ |
| ۰/۰۹ | −۰/۴۸۲۷۶ | −۰/۰۱۶۱۳۵ | −۰/۰۱۶۱۳۵ | ۰/۰۳۲۱۴۱ |
| ۰/۱ | −۰/۰۵۹۹۵۰۷ | −۰/۰۱۹۹۰۱ | −۰/۰۱۹۹۰۱ | ۰/۰۳۹۶۰۶ |

جدول ۲: خطا و خطای نسبی

| گره | خ، آدومیان کلاسیک | خ، آدومیان نوین | خ، نسبی آدومیان کلاسیک | خ، نسبی آدومیان نوین |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰/۰۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰/۰۲ | ۰/۰۰۱۵۹۹ | ۰ | ۱/۹۹۹۱۰۲ | ۰ |
| ۰/۰۳ | ۰/۰۰۳۵۹۷ | ۰ | ۱/۹۹۸۴۰۵ | ۰ |
| ۰/۰۴ | ۰/۰۶۳۹۰ | ۰ | ۱/۹۹۷۵۱۳ | ۰ |
| ۰/۰۵ | ۰/۰۰۹۹۷۵ | ۰ | ۱/۹۹۶۴۲۶ | ۰ |
| ۰/۰۶ | ۰/۰۰۱۴۳۵ | ۰ | ۱/۹۹۶۴۲۶ | ۰ |
| ۰/۰۷ | ۰/۰۱۹۵۰۵ | ۰ | ۱/۹۹۵۱۴۸ | ۰ |
| ۰/۰۸ | ۰/۰۲۵۴۳۸ | ۰ | ۱/۹۹۳۶۸۲ | ۰ |
| ۰/۰۹ | ۰/۰۳۲۱۴۱ | ۰ | ۱/۹۹۲۰۳۱ | ۰ |
| ۰/۱ | ۰/۰۳۹۶۰۶ | ۰ | ۱/۹۹۰۱۹۳ | ۰ |

## ۴. نتایج اصلی

روش آدومیان نوین نسبت به روش آدومیان کلاسیک دقیق تر و همگرایی سریعی دارد چون خطای نسبی روش آدومیان نوین تقریباً صفر است. بنابرین برای حل مسأله مقدار اولیه منفرد لن–امدن روش آدومیان نوین نسبت به روش آدومیان کلاسیک روش مناسب تری است.

## مراجع


1. Adomian, G. *A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation*, Math.Comput. Model. 13 (7)(1992) 17.
2. Adomian, G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer, Boston, MA, 1994.
3. Wazwaz, A. M. *A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations*, Appl. Math. Comput. 128 (2002) 45–57.
4. Wazwaz, A. M. *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*,Chicago,2011.