چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۱۳-۱۲اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

معادله تفاضلی q-پیرسن و جواب‌های آن

محمد مسجدجامعی[۱] و فاطمه سلیمان [۲] *

[۱،۲]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
mmjamei@kntu.ac.ir
fsoleyman@mail.kntu.ac.ir

چکیده. ما در مقاله حاضر معادله تفاضلی q-پیرسن که از حل مساله اشترم لیوویل حاصل می‌شود را بیان کرده و به حل این معادله می‌پردازیم. سپس جواب‌های معادله را در حالات مختلف بررسی کرده و در انتها دو مثال از یافتن تابع وزن برای q-چندجمله‌ایها ارائه می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

تا کنون افراد بسیاری مساله اشترم لیوویل[۱] پیوسته و مساله q-اشترم لیوویل را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱، ۳، ۴]. جواب‌های مساله اشترم لیوویل پیوسته توابع متعامدی هستند که با خودالحاق‌سازی معادله دیفرانسیل حاصل می‌شوند. برای حل مساله q-اشترم لیوویل نیز مانند حالت پیوسته با ضرب تابع وزن در معادله تفاضلی، جواب‌ها به صورت توابع q-متعامد به دست می‌آیند. در واقع تابع وزن جواب معادله تفاضلی q-پیرسن[۲] حاصل از خودالحاق‌سازی معادله است. در این مقاله حل معادله تفاضلی q-پیرسن و یافتن تابع وزن حاصل، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه چند نماد معرفی شده و در بخش بعد نیز جواب‌های معادله تفاضلی q-پیرسن در حالت‌های مختلف ارائه شده است.

مشتق q-جکسون[۳] را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_q y(x) = \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}, \quad q \neq \{0, 1, -1\}, \ x \neq 0.$$

روابط زیر را داریم

$$D_q D_{q^{-1}} y(x) = D_q \left(D_{q^{-1}} y(x) \right),$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. مساله q-اشترم لیوویل، معادله تفاضلی، معادله q-پیرسن .

* سخنران

[۱] Sturm-Liouville
[۲] q-Pearson
[۳] q-Jackson

$$D_q\left(f(x)g(x)\right) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x). \qquad (۱.۱)$$

نماد q-پوکهامر[۴] نیز به شکل

$$(a;q)_0 = 1, \quad (a;q)_n = (1-a)(1-qa)\dots(1-q^{n-1}a), \quad n = 1,2,\dots .$$

است. همچنین می‌توان نماد

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \quad 0<|q|<1, \qquad (۲.۱)$$

را تعریف کرد.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

معادله تفاضلی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi(x)D_q D_{q^{-1}} y_n(x;q) + \psi(x)D_q y_n(x;q) + \lambda_{n,q} y_n(x;q) = 0, \qquad (۱.۲)$$

به طوری که $\lambda_{n,q} \in \mathbb{C}$ برای $n = 0,1,2,\dots$. برای بدست آوردن جواب چندجمله‌ای برای معادله (۱.۲)، $\varphi(x)$ باید حداکثر از درجه ۲ و $\psi(x)$ از درجه ۱ باشد، یعنی

$$\varphi(x) = ex^2 + fx + g, \quad \psi(x) = \varepsilon x + \gamma, \quad e,f,g,\varepsilon,\gamma \in \mathbb{C}, \varepsilon \neq 0.$$

چنانچه معادله (۱.۲) را با ضرب در تابع وزن $w(x;q)$ خودالحاق کنیم، داریم

$$D_q(w(x;q)\varphi(x)D_{q^{-1}}y_n(x;q)) + w(x;q)\lambda_{n,q}y_n(x;q) = 0,$$

به طوری که معادله تفاضلی q-پیرسن به شکل زیر برقرار است

$$D_q(w(x;q)\varphi(x)) = w(x;q)\psi(x). \qquad (۲.۲)$$

چندجمله‌ایهای $\{y_n(x;q)\}_n$ در بازه تعامد نسبت به تابع وزن $w(x;q)$ متعامدند. از معادله تفاضلی (۲.۲) تابع وزن قابل محاسبه است.

۱.۲. جواب‌های معادله تفاضلی q-پیرسن.

نکته ۱.۲. با استفاده از رابطه (۱.۱) معادله (۲.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)} = \frac{\varphi(qx)}{(q-1)x\psi(x) + \varphi(x)},$$

و یا به طور معادل

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)} = \frac{eq^2x^2 + fqx + g}{\alpha x^2 + \beta x + g}, \qquad (۳.۲)$$

به طوری که

$$\alpha = e + (q-1)\varepsilon,$$
$$\beta = f + (q-1)\gamma.$$

[۴] Puchammer

قضیه ۲.۲. اگر معادله تفاضلی q-پیرسن به شکل

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=\theta(x), \tag{۴.۲}$$

باشد. آنگاه جواب را به صورت حاصل‌ضرب زیر داریم

$$w(x;q)=\prod_{k=0}^{\infty}\theta(q^kx). \tag{۵.۲}$$

برهان. برای اثبات کافیست (۵.۲) را در معادله (۴.۲) قرار دهید. $\square$

حاصل‌ضرب (۵.۲) را می‌توان با استفاده از تعریف (۲.۱) نمایش داد. برای معادله (۳.۲) دو دسته جواب در نظر می‌گیریم:
الف. جواب‌های پیوسته برای $x\in\mathbb{R}$ بر حسب حاصل‌ضرب‌های نامتناهی (همگرا).
ب. جواب‌های گسسته برای $x_\nu=q^\nu$ با $\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots$، بر حسب حاصل‌ضرب‌های متناهی. برای $0<|q|<1$ جواب‌های معادله (۳.۲) را در سه حالت زیر داریم
اول. برای

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=1+rx,$$

جواب به صورت زیر است

$$w(x;q)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+rxq^k)=(-rx;q)_\infty,\ \ r\in\mathbb{C}.$$

دوم. برای

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=rx,$$

جواب به صورت زیر است

$$w(x;q)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+rxq^k)(1+\frac{q^{k+1}}{rx})=(-rx,-\frac{q}{rx};q)_\infty,\ \ r\in\mathbb{C},\ r\neq0.$$

سوم. برای

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=\frac{1+sx}{1+tx}.tx,$$

جواب به صورت زیر است

$$w(x;q)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+sxq^k)(1+\frac{q^{k+1}}{tx})=(-sx,-\frac{q}{tx};q)_\infty,\ \ s,t\in\mathbb{C},\ t\neq0.$$

و با ادغام دو حالت آخر جواب معادله تفاضلی

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=\frac{1+sx}{1+tx}.\frac{t}{r},$$

را به شکل زیر خواهیم داشت

$$w(x;q)=\frac{(-sx,-\frac{q}{tx};q)_\infty}{(-rx,-\frac{q}{rx};q)_\infty},\quad r,s,t\in\mathbb{C},\ r,t\neq \circ.$$

نکته ۳.۲. چنانچه داشته باشیم $|q|>۱$، معادله (۳.۲) را برای $q=p^{-۱}$ بازنویسی کرده و با جایگزینی x با px، معادله را برای $\circ<|p|<۱$ می‌نویسیم.

در ادامه دو نمونه از محاسبه تابع وزن برای q-چندجمله‌ایها بیان شده است.

مثال ۴.۲. معادله تفاضلی q-پیرسن برای چندجمله‌ایهای $big\ q-Jacobi$، $P_n(x;a,b,c;q)$، به شکل [۲]

$$\frac{w(x;q)}{w(qx;q)}=\frac{x^۲-(a+c)x+ac}{abx^۲-a(b+c)x+ac}=\frac{(۱-\frac{x}{c})(۱-\frac{x}{a})}{(۱-x)(۱-\frac{bx}{c})},$$

است که با توجه به حالت اول جواب به صورت زیر خواهد بود

$$w(x;q)=\frac{(\frac{x}{a},\frac{x}{c};q)_\infty}{(x,\frac{bx}{c};q)_\infty}.$$

مثال ۵.۲. معادله تفاضلی q-پیرسن برای چندجمله‌ایهای $little\ q-Jacobi$، $P_n(x;a,b;q)$، به شکل [۲]

$$\frac{w(x_\nu;q)}{w(x_{\nu+۱};q)}=\frac{۱-q^{\nu+۱}}{۱-bq^{\nu+۱}}.\frac{۱}{a},$$

است که جواب آن را به صورت زیر داریم

$$w(x_\nu;q)=\frac{(bq;q)_\nu}{(q;q)_\nu}.a^\nu.$$

مراجع

1. I. Area, M. Masjed-Jamei, *A Symmetric Generalization of Sturm-Liouville Problems in q-difference Spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2014, Volume 138, Pages 693–704.
2. R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
3. M. Masjed-Jamei, *Classical orthogonal polynomials with weight function:*$\left((ax+b)^2+(cx+d)^2\right)^{-p}\exp(q\arctan\frac{ax+b}{cx+d})$ *on* $(-\infty,\infty)$ *and a generalization of* T *and* F *distributions*, Integral Transforms and Special Functions, 2004, volume 15, issue 2, pages 137-153.
4. M. Masjed-Jamei, *Three finite classes of hypergeometric orthogonal polynomials and their application in functions approximation*, Integral Transforms and Special Functions, 2002, volume 13, issue 2, pages 169-190.