چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کابردهای آن

۱۳-۱۲اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

نگاشت هاي خطي حافظ تشابه

الهام حسيني [۱] و [۲] تكتم آقاسي زاده

[۱,۲] ***دانشگاه خيام، دانشكده علوم پايه***

elhamhosseini2012@gmail.com
t.aghasizadeh@khayyam.ac.ir

چکیده. ناصفر c و يك عملگر وارون پذير $T \in B(H)$ وجود دارد به طوري كه براي هر $A \in B(H)$ داريم $\phi(A) = cTAT^{-1}$ يا

فرض كنيم كه H يك فضاي هيلبرت مختلط تفكيك پذير نامتناهي البعد باشد، $B(H)$ جبر همه عملگرهاي خطي كراندار روي H و $\phi : B(H) \longrightarrow B(H)$ يك نگاشت دوسويي باشد به طوري كه براي هر جفت از عملگرهاي متشابه $A, B \in B(H)$، $\phi(A)$ و $\phi(B)$ متشابه هستند. در اين صورت يك عدد مختلط $\phi(A) = cTA^tT^{-1}$ كه A^t ترانهاده A نسبت به يك پايه متعامد دلخواه و ثابت در H مي باشد.

۱. پيش‌گفتار

مسائل نگاشت هاي نگهدارنده روي جبرهاي ماتريسي كه يك خاصيت يا رابطه خاص را حفظ مي كنند در دهه هاي اخير بررسي شده و برخي از نتايج آن به حالت نامتناهي بيان شده است. نگاشت هاي خطي كه متشابه بودن را روي جبر تمام ماتريس هاي $n \times n$ حفظ مي كنند. در [۱] بررسي شده و بايد به صورت يكي از اشكال $A \longrightarrow cTAT^{-1} + dtr(A)I$ يا $A \longrightarrow cTAT^{-1} + dtr(A)I$ باشند. همچنين در [۲] نيز اثبات گرديده كه وقتي H يك فضاي هيلبرت از بعد نامتناهي باشد و $\phi : B(H) \longrightarrow B(H)$ يك نگاشت خطي پوشا باشد و همچنين خاصيت متشابه بودن را در دو جهت حفظ كند به يكي از دو صورت $A \longrightarrow cTAT^{-1}$ يا $A \longrightarrow cTA^tT$ مي باشد. در اين مقاله گسترش مطالب بالا را در حالتي كه X يك فضاي باناخ و $B(X)$ جبر تمام عملگرهاي كراندار روي X باشد را بررسي كرده و نتيجه مشابهي را بدست مي آوريم.

تعريف ۱.۱. ***$F(H)$ ايده‌آل همه عملگرهاي از رتبه متناهي و $F_0(H)$ زيرفضاي عملگرهاي از رتبه متناهي و داراي اثر صفر باشند. وقتي A و B براي هر $A, B \in B(H)$ متشابه باشند مي نويسيم $A \sim B$. براي هر $x, y \in H$ نماد y^*x ضرب داخلي x و y را نشان***

Mathematics Subject Classification. 47B49.

واژگان كليدی. فضاي هيلبرت، نگاشت خطي حافظ و تشابه. .

مي دهد. $x^\perp$ متمم متعامد بردار x است. اگر x و y بردارهاي ناصفر در H باشند. xy^* نشان دهنده عملگر از رتبه يك است و براي $z \in H$ تعريف مي‌كنيم $(xy^*)z = (y^*z)x$. علاوه بر اين xy^* يك عملگر از مربع صفر است اگر و فقط اگر $yx^* = ۰$ باشد. يك عملگر $A \in B(H)$ را عملگر برگشت مي ناميم هرگاه $A^۲ = I$. مي گوييم كه يك برگشت نامتناهي است هرگاه فضاهاي ويژه متناسب با مقادير ويژه آن يعني ۱ و ۱− از بعد نامتناهي باشند.

برهان لم و گزاره زير در [۳] آمده است.

لم ۲.۱. ***فرض‌كنيم $A \in B(H)$ و $A \notin \mathbb{C}I$ به صورت جمع يك عملگر فشرده و اسكالر باشد. در اين صورت عملگرهاي $B_۱, B_۲ \in F(H)$ از اثر صفر وجود دارند به طوري‌كه***
الف) $B_۱$ و $B_۲$ مستقل خطي هستند و
ب) براي $k = ۱, ۲$ داريم $A + B_k \sim A$.

گزاره ۳.۱. ***فرض‌كنيم H يك فضاي هيلبرت تفكيك پذير باشد. فرض‌كنيم $\phi : B(H) \longrightarrow B(H)$ يك نگاشت خطي يك به يك باشد به طوري‌كه ϕ عملگرهاي پوچ توان از رتبه يك را حفظ مي‌كند. در اين صورت يكي ازگزاره هاي زير برقرار است.***
الف) يك بردار x ناصفر در H و يك نگاشت خطي مزدوج يك به يك $\tau : F_۰(H) \longrightarrow x^\perp$ وجود دارد به طوري‌كه براي هر $A \in F_۰(H)$ داريم $\phi(A) = x(\tau(A))^*$؛
ب) يك بردار y ناصفر در H و يك نگاشت خطي مزدوج يك به يك $\delta : F_۰(H) \longrightarrow y^\perp$ وجود دارد به طوري‌كه براي هر $A \in F_۰(H)$ داريم $\phi(A) = x(\delta(A))^*$؛
پ) نگاشت هاي خطي يك به يك $T, S : H \longrightarrow H$ وجود دارد به طوري‌كه براي هر عملگر پوچ توان از رتبه يك xy^* داريم $\phi(xy^*) = (Tx)(Sy)^*$؛
ت) نگاشت هاي خطي مزدوج يك به يك $T, S : H \longrightarrow H$ وجود دارد به طوري‌كه براي هر عملگر پوچ توان از رتبه يك xy^* داريم $\phi(xy^*) = (Ty)(Sx)^*$.

برهان قضيه اساسي زير در [۳] آمده است كه به بيان آن مي پردازيم.

قضيه ۴.۱. ***فرض‌كنيم $\phi : B(H) \longrightarrow B(H)$ يك نگاشت خطي دوسويي است به طوري‌كه براي هر جفت عملگرهاي متشابه $A, B \in B(H)$، $\phi(A)$ و $\phi(B)$ متشابه باشند. در اين صورت يك عدد مختلط ناصفر c و يك عملگر وارون پذير $T \in B(H)$ وجود دارد به طوري‌كه براي هر $A \in B(H)$ داريم $\phi(A) = cTAT^{-۱}$ يا براي هر $A \in B(H)$ داريم $\phi(A) = cTA^tT^{-۱}$ كه A^t ترانهاده A نسبت به يك پايه متعامد دلخواه و ثابت در H مي باشد.***

برهان. ابتدا نشان مي دهيم كه براي يك اسكالر ناصفر $\mu \in \mathbb{C}$ داريم $\phi(I) = \mu I$. چون ϕ پوشاست لذا يك عملگر $A \in B(H)$ وجود دارد به طوري كه $\phi(A) = I$. فرض كنيم كه A به صورت عملگر اسكالر نباشد، يك $B \neq A$ وجود دارد به طوري كه $A \sim B$. پس طبق فرض

$\phi(A) = I \sim \phi(B)$. در نتيجه $\phi(B) = I$. بنابر اين چون $\phi(A) = \phi(B)$ و ϕ يك به يك است نتيجه مي گيريم که $A = B$ که اين با فرض $A \neq B$ در تناقض است. پس A عملگري اسکالراست. حال مي خواهيم نشان دهيم که ϕ عملگرهاي پوچ توان از رتبه يك را حفظ مي کند. فرض کنيم که $B \in B(H)$ يك عملگر از رتبه يك باشد. چون ϕ پوشاست لذا يك عملگر $A \in B(H)$ وجود دارد به طوري که $\phi(A) = B$. واضح است که A يك عملگر اسکالر نيست، چون اگر A يك عملگر اسکالر باشد آنگاه طبق رابطه $\phi(A) = B$، B نيز يك عملگر اسکالر است که با از رتبه يك بودن B در تناقض است. پس مي توانيم يك بردار x را بيابيم به طوري x و Ax مستقل خطي باشند. در نتيجه يك $y \in H$ وجود دارد به طوري که $y^*x = 0$ و $y^*Ax = 1$. قرار مي دهيم $N = xy^*$. بنابراين $N^2 = 0$ و $NAN = N$. براي هر $\lambda \in \mathbb{C}$ يك عملگر وارون پذير $R_\lambda \in B(H)$ وجود دارد به طوري که $\phi((I+\lambda N)A(I-\lambda N)) = R_\lambda B R_\lambda^{-1}$ بنابراين $\phi(A-(I+\lambda N)A(I-\lambda N)) - B = R_\lambda B R_\lambda^{-1}$. چون $R_\lambda B R_\lambda^{-1}$ براي هر λ، از رتبه يك است پس رتبه $(\lambda^2\phi(N) + \lambda\phi(AN-NA) - B)$ نيز يك مي باشد. حال رابطه بالا را بر λ^2 تقسيم مي کنيم و λ را به سمت بي نهايت ميل مي دهيم و با استفاده از اين که مجموعه همه عملگرهاي از رتبه حداکثر يك بسته است، نتيجه مي گيريم که $rank\phi(N) = 1$. علاوه بر اين داريم $N \sim 2N$ و بنابراين طبق فرض $\phi(N) \sim 2\phi(N)$. چون $\phi(N)$ از مرتبه يك است و داريم $\phi(N) = \phi(0) = 0$ بنابراين $\phi(N)$ پوچ توان است. از طرفي چون همه عملگرهاي از رتبه يك پوچ توان با يکديگر متشابهند، مي توانيم نتيجه بگيريم که ϕ عملگرهاي پوچ توان از رتبه يك را حفظ مي کند. بنابراين نتيجه مي گيريم که $\phi(F_0(H)) \subset F_0(H)$.
حال اگر فرض کنيم که براي يك اسکالر λ و يك عملگر فشرده K، $\phi(A) = \lambda I + K$. طبق نتيجه ديويد و مارکوس در [۴] چون A به صورت جمع يك عملگر اسکالر و فشرده نيست، پس براي هر عملگر $B \in B(H)$، اسکالرهاي $\mu_1, \ldots \mu_6$ و عملگرهاي $B_1, \ldots B_6$ متشابه با A وجود دارد به طوري که $B = \mu_1 B_1 + \ldots + \mu_6 B_6$. از تشابه A با $B_1, \ldots B_6$ و اينکه $\phi(A) = \lambda I + K$ است، نتيجه مي گيريم که $\phi(B)$ نيز به صورت جمع يك عملگر اسکالر و فشرده مي باشد و با پوشايي ϕ به تناقض مي رسيم. در ادامه نشان مي دهيم که اگر A به صورت جمع يك عملگر اسکالر و از رتبه متناهي نباشد، آنگاه $\phi(A)$ نيز به اين شکل نيست.
به برهان خلف فرض کنيم که يك عملگر $A \in B(H)$ وجود دارد به طوري که براي يك اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ و يك عملگر از رتبه متناهي F داريم $A \notin \mathbb{C}I + F(H)$ و $\phi(A) = \lambda I + F$. پس با استفاده از لم ۴.۲ در [۳]، يك عدد صحيح M وجود دارد به طوري که براي هر عملگر از مربع صفر و از رتبه متناهي $B \in B(H)$ داريم $rank\phi(B) \leq M$. مي دانيم که ϕ نگاشتي است که عملگرهاي پوچ توان از رتبه يك را حفظ مي کند، بنابراين با استفاده از گزاره ۳.۱، قسمت سوم و شکل کانوني جردن، هر عملگر B از مربع صفر و از رتبه m، که m هر عدد صحيح مثبت بزرگتر از M است را مي توانيم به صورت $B = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k^*$ بنويسيم که براي $k = 1, \ldots, m$، بردارهاي $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ مستقل خطي هستند و $y_k^* x_k = 0$. چون T و S عملگرهاي يك به يك هستند، عملگر $\phi(A) = \sum_{k=1}^{k=m} (Tx_k)(Sy_k)^*$ مي باشد. از طرفي چون هر $(Tx_k)(Sy_k)^*$ يك عملگر از رتبه يك است، پس $rank\phi(B) = m$، اما چون $m > M$ با فرض $rank\phi(B) \leq M$ به تناقض مي رسيم. به طور مشابه مي توانيم ثابت کنيم

كه قسمت چهارم گزاره ۳.۱ نيز نمي تواند اتفاق بيافتد. فرض كنيم كه قسمت اول گزاره ۳.۱ اتفاق بيافتد، پس يك بردار ناصفر $x \in H$ و يك نگاشت مزدوج خطي $\tau : F_\circ(H) \longrightarrow x^\perp$ وجود دارد به طوري كه براي هر $C \in F_\circ(H)$ داريم. $\phi(C) = x(\tau(C))^*$ فرض كنيم كه $z \in H$ يك بردار مستقل خطي با x باشد، يك بردار ناصفر $v \in H$ را انتخاب مي كنيم، چون ϕ پوشاست لذا يك عملگر $D \in B(H)$ وجود دارد به طوري كه $\phi(D) = zv^*$. با استفاده از گام قبل چون $\phi(D)$ را مي توان به صورت جمع يك عملگر اسكالر و فشرده در نظر گرفت پس D نيز به صورت جمع يك عملگر اسكالر و فشرده است و بنابراين واضح است كه D يك عملگر اسكالر نيست، پس طبق لم ۲.۱ عملگرهاي مستقل خطي $N_۱, N_۲ \in F_\circ(H)$ وجود دارد به طوري كه $D + N_۱$ و $D + N_۲$ با D متشابه هستند، حال طبق فرض قضيه، $\phi(D + N_۱)$ و $\phi(D + N_۲)$ با $\phi(D)$ متشابه هستند، در نتيجه داريم $zv^* + x(\tau_۱)^* \sim zv^*$. چون $zv^* + x(\tau_۱)^*$ از رتبه يك است و z و x مستقل خطي هستند به راحتي مي توان نتيجه گرفت كه v و $\tau(N_۱)$ بايد وابسته خطي باشند. به همين طريق مي توان نشان داد كه v و $\tau(N_۲)$ وابسته خطي هستند، پس $\tau(N_۱)$ و $\tau(N_۲)$ نيز وابسته خطي اند و از يك به يك بودن ϕ نتيجه مي گيريم كه $N_۱$ و $N_۲$ نيز وابسته خطي مي باشند كه تناقض است. به روش مشابه مي توان نشان داد كه اگر قسمت دوم گزاره (۳.۱) اتفاق بيافتد مجددا به تناقض مي رسيم. پس نشان داديم كه مجموعه عملگرهايي كه به صورت جمع يك عملگر اسكالر و از رتبه متناهي نيستند تحت ϕ پايا هستند. حال داريم $\phi(F_\circ(H)) \subset F_\circ(H) \subset F(H) \subset F(H) + \mathbb{C}I \subset \phi(F(H) + \mathbb{C}I)$ چون$\phi(F_\circ(H))$ در $\phi(F(H) + \mathbb{C}I)$ از هم بعد ۲ است، بنابراين طبق رابطه بالا نتيجه مي گيريم كه $\phi(F_\circ(H)) = F_\circ(H)$ و $\phi(F(H) + \mathbb{C}I) = F(H) + \mathbb{C}I$. يكبار ديگر از گزاره ۳.۱ استفاده مي كنيم. چون $\phi(F_\circ(H)) = F_\circ(H)$ پس قسمت سوم يا چهارم گزاره ۳.۱ اتفاق مي افتد. حال طبق يادآوري بعد از گزاره ۳.۱ در [۳] داريم كه براي هر $A \in F_\circ(H)$، $\phi(A) = cTAT^{-۱}$ يا $\phi(A) = cTA^tT^{-۱}$ مي باشد. براي راحتي كار قرار مي دهيم $\psi = C^{-۱}T^{-۱}\phi T$، بنابراين براي هر $A \in F_\circ(H)$، $\psi(A) = A$. فرض كنيم كه $A \in B(H)$ يك عملگر برگشت باشد. هر دو عملگر برگشت متشابهند، از طرفي براي هر عملگر برگشت $A \in B(H)$ از [۳] داريم كه يك $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوري كه$\phi(A) = A + \lambda I$. حال با دوبار استفاده از نتيجه ديويدسون و ماركوس براي عملگرهاي برگشت داريم براي هر $A \in B(H)$، $\psi(A) = A$.

$\square$

مراجع

1. F.Hiai,Similarity preserving linear maps on matrices, Linear Algebra Appl. 97 (1987), 127-139.
2. A.A. Jafarian and A.R Sorour, Spectrum-preserving linear maps, J.Funct. Anal. 66 (1986), 255-261.
3. Peter Semrl, Similarity Preserving Linear maps, J. Operator Theory (to appear).
4. K.R. Davidson and L.W. MarcouX, Linear spans of unitary and similarity orbits of a Hilbert space operator, J. Operator Theory 52 (2004), 113-132.