نگرش فیزیک آماری بر مسائل کد

جعفری زاده ، محمدعلی[1] ؛ ، نوین فرد ، الهه[1] ؛ ، مرادی ، الهام [1]

[1]گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک ،دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز ، تبریز

چکیده

در این مقاله کدها را به مدل آیزینگ مپ کرده و در کانالهای BSC وBAWGNC ارسال میکنیم،از این طریق تناظر بین مسائل کد و فیزیک آماری مورد مطالعه قرار می کیرد.

Statistical physics perspective on coding problems

Jafarizadeh, Mohamadali[1];Novinfard,Elaheh [1];Moradi,Elham [1]

[1] *Department of Theoretical Physics and astrophysics, University of Tabriz, Tabriz,*

Abstract

In this paper, statistical physics perspective investigated over coding problems with mapping codes to Ising model and sending this codes in BSC and BAWGNC.

PACS No.05

مقدمه

هدف از این مقاله برقراری تناظر بین مسائل کد گشایی و مسائل فیزیک آماری و همچنین بررسی کد های LDPCاز دیدگاه فیزیک آماری مسئله می باشد .در ابتدا مفاهیم اولیه در مورد فاکتور گراف و الگوریتم انتقال پیام را معرفی می کنیم.سپس به بررسی دو نوع الگوریتم سام پروداکت وماکس پروداکت می پردازیم و این دونوع الگوریتم را توسط مپ کردن کد به مدل آیزینگ (فیزیک آماری) حل می کنیم.

فاکتورگراف

در نظریه احتمال و کاربردهایش،یک فاکتورگراف،یک نوع خاصی از مدل های گرافیکی است.که براحتی قادر به محاسبه ی تابع توزیع های مارجینال با استفاده از الگوریتم های انتقال پیام می باشد.

مدل گرافیکی به طور کلی نشان دهنده ی وابستگی بین متغیرهای یک گراف است.یک فاکتور گراف،نمایش توسط یالها و گره های معادلات پریتی-چک است.هر متغیر مطابق با نماد یک کد ورد است و هر گره ی چک یک معادله ی چک را نمایش می دهد.

هر یال، یک گره ی متغیر را به گره ی چک متصل می کند،که مطابق با یک 1 در ماتریس پریتی-چک است.یک فاکتور گراف،دیاگرامی است که فاکتورگیری یک تابع چند متغیره رانمایش می دهد.

انتقال پیام

انواع الگوریتم های انتقال پیام عبارتند از الگوریتم سام پروداکت و الگوریتم ماکس پروداکت این دو الگوریتم توسط عبور دادن پیام ها در طول یالهای فاکتور گراف عمل می کنند.بنابراین آن ها را الگوریتم انتقال پیام می نامند.پیام ها از متغیر به چک و بر عکس فرستاده می شوند

انواع کانال:

کانالBSC: ورودی در این کانال $x \in \{-1,+1\}$ وخروجی این کانال $y \in \{-1,+1\}$.احتمال گذار کانال $p(+1|-1) = p(-1|+1) = \varepsilon$ و $p(+1|+1) = p(-1|-1) = 1-\varepsilon$ کهε نشان دهنده خطای کانال است و $\varepsilon \in \{0,1/2\}$است.

کانال BAWGNC:ورودی کانال $x \in \{+1,-1\}$ و خروجی کانال $y \in \mathbb{R}$.احتمال گذار کانال $p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}$که در آن ε^2واریانس نویز است و $\varepsilon \in [0,+\infty)$

روش سام پروداکت:

سام-پروداکت یک الگوریتم پیام تکرار کننده است.متغیرهای اصلی ما در این الگوریتم "پیام ها" هستند که به صورت احتمالاتی توزیع شده اند.به این پیام ها باور می گویند.

پیام از فانکشن به متغیر:

$$m_{a\to i}^{(L)}(x_i) \cong \sum_{x_{\partial_a}\setminus i} \Psi_a(x_{\partial_a}) \prod_{j\in\partial_a\setminus i} m_{j\to a}^{(L)}(x_j) \quad (1)$$

پیام از متغیر به فانکشن:

$$m_{i\to a}^{(L+1)}(x_i) \cong \prod_{b\in\partial_i\setminus a} m_{b\to i}^{(L)}(x_i) \quad (2)$$

مارجینال:

$$b_i^{(L)}(x_i) \cong \prod_{a\in\partial_i} m_{a\to i}^{(l-1)}(x_i) \quad (3)$$

الگوریتم این روش به این صورت است که

پیام ورودی از یک متغیر به یک فانکشن در مرحله اولیه (صفر) برابر است با

$$m_{i\to a}^{(0)}(x_i) = 1 \quad (4)$$

به صورت مکرر پیام را بین متغیر ها و فانکشن ها ارسال میکنیم و پیام ها را توسط فرمول های (1) و (2) آپدیت می کنیم.

زمانیکه پیام ها به مقدار یکسانی همگرا شدند ارسال پیام را متوقف می کنیم. بعد از همگرا شدن پیام ها مقدار مارجینال را با استفاده از فرمول (3) بدست می آوریم.

روش ماکس پروداکت:

این روش مشابه روش سام پروداکت الگوریتم انتقال پیام تکرار کننده است.روش آپدیت ماکس پروداکت به منظور پیدا کردن تقریبی حالت یک توزیع که بوسیله یک فاکتور گراف تعیین شده است استفاده می شود.

در این الگوریتم پیام ها به این صورت تعریف می شوند:

پیام از فانکشن به متغیر:

$$m_{a\to i}^{(L)}(x_i) \cong \max_{x_{\partial_a\setminus i}} \{\Psi_a(x_{\partial_a}) \prod_{j\in\partial_a\setminus i} m_{j\to a}^{(L)}(x_j)\} \quad (5)$$

پیام از متغیر به فانکشن:

$$m_{i\to a}^{(L+1)} \cong \prod_{b\in\partial_i\setminus a} m_{b\to i}^{(L)}(x_i)\} \quad (6)$$

ماکزیمم مارجینال:

$$b_i^{(l)}(x_i) \cong \prod_{b \in \partial_i \backslash a} m_{b \to i}^{(l)}(x_i) \qquad (7)$$

الگوریتم این روش به این صورت است که:

پیام ورودی از یک متغیر به یک فانکشن در مرحله اولیه (صفر) برابر است با

$$m_{i \to a}^{(0)}(x_i) = 1 \qquad (8)$$

به صورت مکرر پیام را بین متغیر ها و فانکشن ها ارسال می کنیم و پیام ها را توسط فرمول های (5) و (6) آپدیت می کنیم.

زمانیکه پیام ها به مقدار یکسانی همگرا شدند ارسال پیام را متوقف می کنیم.

بعد از همگرا شدن پیام ها مقدار مارجینال را با استفاده از فرمول (7) بدست می آوریم.

کد های LDPC:

کد هایی که در این مقاله استفاده شدند کد های low density parity check نام دارند.کدهای LDPC جز binary block کدها هستند.ماتریس پریتی–چک آنها دارای تعداد کمی 1 است.الگوریتم هایی که برای کدگشایی این کدها استفاده می شود عبارتند از,انتشار بیلیف،ماکس پروداکت و سام پروداکت، که ما در این مقاله از دو الگوریتم ماکس و سام برای کد گشایی این کد ها استفاده کرده ایم.

این کدها،کدهای تصحیح کننده ای هستند که در کانال های ارتباطاتی نویزدار به منظور کاهش احتمال از دست دادن اطلاعات استفاده می شوند.بنابراین نرخ ارسال اطلاعات می تواند به حد مطلوب شانون نزدیک شود.

ما از نمایش تنر گراف استاندارد برای نمودار کردن کدهای پریتی–چک استفاده می کنیم.تنر گراف یک گراف دو قسمتی با دو مجموعه از گره ها است.یک مجموعه شامل گره های متغیر و مجموعه ی دیگر شامل چک نودها می باشد.

در این مقاله این کدها در دو کانال binary symmetric channelو binary additive white Gaussian noise channelرسال شده اند و نتایج برای این دو کانال نوشته شده اند،همچنین نتایج برای دو حالت hardوsoftگزارش شده است.

تعمیم به فیزیک آماری

در این قسمت نشان می دهیم چگونه توسط فرمول زیر فیزیک آماری و کد گشایی کد های LDPC به هم مربوط می شوند.در کانال BSC ،

$$\mu(x) = \frac{1}{z} \prod_{a \in F} \Psi_a(x_{\partial a}) \qquad (9)$$

$$P(X|Y) = \frac{1}{z} \sum_X \prod_{a=1}^{m} \frac{(1 + x_{\partial_a} \tanh j)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{l_i}{2} x_i} \qquad (10)$$

$$z = \prod_{a=1}^{m} \frac{(1 + x_{\partial_a} tanhj)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{l_i}{2} x_i} \qquad (11)$$

با توجه به فرمول (9)و(10) داریم:

$$\Psi_a(x_{\partial a}) = \prod_{a=1}^{m} \frac{(1 + x_{\partial_a} tanhj)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{l_i}{2} x_i} \qquad (12)$$

برای برقراری تناظر بین مسائل کدگشایی و فیزیک آماری فرمول(12) را در روابط(1) و(5)جایگذاری می کنیم.

در کانال BAWGNC،

$$P(X|Y) = \frac{1}{z}\sum_X \prod_{a=1}^{m} \frac{(1+x_{\partial_a} tanhj)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{y_i x_i} \quad (13)$$

$$z = \prod_{a=1}^{m} \frac{(1+x_{\partial_a} tanhj)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{y_i x_i} \quad (14)$$

$$\Psi_a(x_{\partial a}) = \prod_{a=1}^{m} \frac{(1+x_{\partial_a} tanhj)}{2} \prod_{i=1}^{n} e^{y_i x_i} \quad (15)$$

روابط بالا برای حالsoft نوشته شده اند .برای حالت hard کافی است مقدار j=∞ قرار بدهیم.

مثال 1

حالت soft:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P	0.01	0.09	0.1	0.45	0.47	0.49
J	2.3	1.16	1.1	0.11	0.07	0.03

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p	0.01	0.1	0.3	0.45	0.47	0.49
J	0.77	0.37	0.15	0.04	0.03	0.01

مثال 2

حالت hard:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{P=0.49}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{P=0.49}$$

نتایج

نتایج حاصل از الگوریتم های انتقال پیام در دو کانال BSCوBAWGNC برای حالتی که فاکتور گراف درختی باشد به صورت دقیق عمل می کنند.اما در حالتی که فاکتور گراف حلقه داشته باشد در اکثر موارد جواب دقیق به دست نمی آید.

مرجع‌ها

[1]M.Mezard; “information physics and computation”;, (2009).

[2]Frank R. Kschischang, Brendan J. Frey, Hans-Andrea Loeliger ; “Factor Graphs and the Sum-Product Algorithm” IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 47, NO. 2, (2001).

[3]SH.Kudekar; “Statistical physics method for sparce graph codes”;thesis No.4442.(2009).