

## کنترل ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی با تکیه گاه متحرک به کمک مواد پیزوالکتریک

سالار به مردی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارسنجان، گروه مهندسی مکانیک، ارسنجان، ایران

behmardisalar@gmail.com

محمد آزادی

گروه مهندسی مکانیک، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

mohammad.azadi@gmail.com

### چکیده

در این پژوهش سعی شده، تاثیر اندازه و سایز لایه های پیزوالکتریک در میزان قدرت لایه ها و همچنین اثرات جرم، سختی فنر و اندیس کسر حجم، بر روی ارتعاشات تیر مواد مدرج تابعی مورد بحث و بررسی قرار گیرد. لایه های پیزوالکتریک به هر دو طرف تیر چسبیده اند که به عنوان عملگرها و حسگرها عمل می کنند. تیر از یک انتها به تکیه گاهی متحرک و از انتهای دیگر با یک فنر، مهار شده است. جهت بررسی اثرات جرم متصل به تیر، یک جرم متمرکز در فاصله دلخواه از تکیه گاه تیر در نظر گرفته شده است. روابط حاکم بر مسئله به کمک روش لاگرانژ استخراج و کنترلی فعال جهت کاهش ارتعاشات القا شده در تیر اعمال شده است. اثرات تقسیم لایه های پیزوالکتریک بر روی تیر مشاهده می گردد و در نهایت کل سیستم شبیه سازی شده و نتایج ارائه خواهد شد. با استفاده از روش عددی لاگرانژ ریلی ریتز معادلات حاکم بر مسئله به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در نمونه مورد بررسی ماتریس میرایی را صفر در نظر گرفته ایم. جهت کنترل ارتعاشات تیر از یک کنترل بر پایه ی لیاپانوف استفاده شده است. با قرار دادن روابط حاکم بر تیر درون معادله لیاپانوف، مشاهده می شود که ارتعاشات تیر به خوبی کنترل گشته و به نتایج خوبی دست می یابیم. شبیه سازی نتایج، مصداق برتری، کارایی و فواید کنترلر مطرح شده است که می توان با تقسیم کنترلر به لایه های کوچکتر در فواصل مناسب به کنترلر بهتری دست یافت. در کنترل ارتعاشات تیر اعمال و انتخاب شرایط مرزی و اولیه تاثیر مهمی بر کنترل تیر دارد و همچنین از این پژوهش دریافت شد که انتخاب وزن و محل قرار گیری جرم متمرکز در کنترل ارتعاشات تیر تاثیر بسزایی دارد.

**واژه های کلیدی:** کنترل فعال، تیر مدرج تابعی، لایه های پیزوالکتریک، تکیه گاه متحرک.

## مقدمه

کاهش ارتعاشات سازه از دیرباز مورد توجه محققان بوده است. پیشرفت روز افزون بشر در استفاده از مواد نو امری اجتناب ناپذیر و غیر قابل انکار بوده است. امروزه فلزاتی نظیر آهن، مس و غیره به تنهایی نمی توانند پاسخگوی نیازهای بشر باشند، در نتیجه رفع نمودن این نیاز ها مستلزم مواد تمرکز بیشتر بر تحقیق و بررسی در زمینه مواد نو می باشد. مواد مدرج تابعی کلاس جدیدی از مواد کامپوزیتی اند خواص متغیر ویژه ای دارند. مواد مدرج تابعی در سال ۱۹۸۰ توسط محققان ژاپنی، در مواردی که نیاز به موادی مقاوم نسبت به حرارت و بارهای دینامیکی بود ساخته و استفاده شد. ارتعاشات القا شده در سازه هایی نظیر بال هواپیما، آنتن های مخابراتی، پره های توربین، محفظه های احتراق و غیره می تواند به شدت مخرب باشد، لذا استفاده از سازه های هوشمند و کنترل فعال جهت تعدیل ارتعاشات آنها، روش هایی است که اخیرا در مطالعات مورد استفاده قرار می گیرند و پیرامون آنها تحقیقات مختلفی در حال شکل گیری می باشد. در مواد مدرج تابعی تغییرات هموار و پیوسته ای در جهت ضخامت وجود دارد. این مواد به صورت موزائیک از سرامیک و فلز تهیه می گردند که به طور همزمان مقاومت بسیار خوبی در مقابل حرارت و بارهای دینامیکی دارند. مواد مدرج تابعی خصوصیات خوبی در جهات مختلف دارند. خصوصیات مکانیکی این مواد اغلب در یک سری تعریف می گردد و تغییرات اندیس طبق قانون توان در مراجع قابل ملاحظه است. اساس تئوری مواد مدرج تابعی را می توان در مقاله سورش و مورتون (S. Suresh and A. Mortensen, 1998) ملاحظه نمود. کنترل ارتعاشات اجباری یک تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی به کمک لایه های پیزوالکتریک، که تیر توسط یک بار متحرک با سرعت ثابت بارگذاری شده است، توسط علی اصغر جعفری و مرتضی فتح آبادی بحث و بررسی گردیده است (A.A.jafari and m.fathabadi, 2013). آنها میدان جا به جایی را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تیر ها و معادلات حرکت تیر با استفاده از اصل هامیلتون استخراج کرده اند. آنالیز ارتعاشات حرارتی - مکانیکی یک تیر مدرج تابعی ساندویچی، با پایه ی الاستیک متغیر را با استفاده از روش تقاض کواراتیک اصلاح شده توسط پردهان و مور انجام شده است (S.C. Pradhan and T. Murmu, 2009). مطالعه آنها به صورت پارامتریک بر روی جواب ارتعاشات تیر های مدرج تابعی و مواد مدرج تابعی ساندویچی بوده است. مورین و همکارانش (J. Murina et al, 2010) حل دقیق ارتعاشات آزاد در اثر خمش یک تیرمدرج تابعی متأثر از نیروی محوری را بررسی نموده اند، آنها نتایج خود را با نتایج بدست آمده از یک نرم افزار المان محدود که در آن از یک المان دو بعدی، با مش خیلی خوب استفاده شده است، مقایسه کرده اند. آنالیز ارتعاشات آزاد تیر های لایه ای مدرج تابعی با تئوری های مختلف و المان محدود توسط ام.فیلیپ و همکارانش انجام شده است. آنها جهت آنالیز از روش CUF استفاده کرده اند (M. Filippi et al, 2014). آنالیز ارتعاشات آزاد تیر های جعبه ای مدرج تابعی دیوار نازک و ضخیم توسط نورالدین و همکارانش انجام شده است (Noureddine Ziane et al, 2013). آنها در مقاله خود جهت حل و بدست آوردن ماتریس سختی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده اند. آنالیز ارتعاشات غیر خطی و خطی قیود الاستیک متخلخل، ساخته شده از مواد مدرج تابعی ناتاهیت و واریدهی بررسی شده است، که آنها به بررسی مشکلات آنها پرداخته اند (Nuttawit Wattanasakulponga, Variddhi Ungbhakorn, 2014). آنالیز مودال تیر های مدرج تابعی با خصوصیات مواد متغییر طولی و متقارن عرضی پیوسته متأثر از نیروی محوری بزرگ توسط مورین و همکارانش (J. Murin et al, 2012) انجام شده است. افزایش ظرفیت کمانش و لرزش یک ستون با جرم متمرکز دلخواه و یک جفت لایه ی پیزوالکتریک چسبیده به هر دو طرف آن توسط فاضل زاده و همکارانش (S. A. Fazelzadeh et al, 2010) مطالعه گردید. عزیز ی و احمدیان (H. Ahmadian and H. Azizi, 2011) پایداری یک سازه ی تیر مانند در معرض یک نیروی توزیعی خطی پیرو را مطالعه کرده اند. سازه از دو تیر به هم پیوسته بوسیله یک اتصال غیر خطی، که مجموعه ای از فنر های خطی و غیر خطی و یک دمپر بود، ساخته شد. پایداری یک تیر نوسانی که بار مماسی غیر یکنواخت به آن اعمال شده و روی یک پایه ی الاستیک قرار دارد، توسط کاظمی لاری و فاضل زاده (S. A. Fazelzadeh and M. A. Kazemi-Lari, 2012) بحث شد. اخیرا مطالعه تیر های مدرج تابعی گسترش یافته است. غریب و همکارانش (A. Gharib et al, 2008) یک تیر مدرج تابعی تحلیلی شامل دو لایه پیزوالکتریک را مطالعه کرده اند. خصوصیات لایه مدرج تابعی در جهت

ضخامت، مطابق با قانون توان جزء حجم توزیع شده بود. آنها اثرات جزء حجم تشکیل دهنده مدرج تابعی، روی دامنه ارتعاشات تیر را نشان دادند. لی و همکارانش (S. Li et al, 2009) ارتعاش آزاد ناشی از حرارت استاتیکی پس کمانش تیرهای مدرج تابعی با لایه های پیزوالکتریک که سطح را پوشانده و در معرض دما و ولتاژ اند، را مطالعه کردند. ارتعاش یک تیر با ساپورت ساده در معرض جرم متحرک با استفاده از تئوری های تغییر شکل برشی مرتبه سوم تیرهای تیموشنکو و اوایلر برنولی توسط سیمسک (M. Şimşek, 2010) تفسیر شده است. وی و همکارانش (D. Wei et al, 2011) یک روش تحلیلی برای حل ارتعاشات آزاد ترک تیرهای مدرج تابعی با بار محوری، اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی پیشنهاد کرده اند. وحید آزادی و همکارانش (Vahid Azadi et al, 2013) کنترل ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی تحت نیروی پیرو به کمک لایه های پیزوالکتریک را انجام دادند. تیر آنها از یک انتها ثابت و از انتهای دیگر با یک فنر مهار الاستیسیته شده و در معرض نیروی پیرو قرار داشت. کنترل ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی دوار با لایه های پیزوالکتریک کامپوزیتی توسط جی و همکارانش (J. Murín et al, 2012) انجام شده است. تیرهای کامپوزیتی دوار شبیه تیغه ها در زمینه های مختلف از جمله هوا و فضا و مهندسی مکانیک کاربرد دارد. در تحقیق آنها کنترل ارتعاشات در اثر خمش مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. شیمسک و کوچاتورک (Simsek M. and Kocatiürk, 2009) ارتعاش آزاد و اجباری تیر از جنس مدرج تابعی را تحت بار متحرک بررسی کردند. آنها در این تحقیق بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با استفاده از روش لاگرانژ معادلات حرکت را استخراج کردند. همچنین شیمسک (Simsek, 2010) آنالیز ارتعاش غیر خطی یک تیر تیموشنکو مدرج تابعی را تحت بار متحرک با تحریک هارمونیک بررسی کرد. وی آنالیز غیر خطی بر پایه تئوری تیموشنکو را با تحلیل خطی بر پایه تئوری کلاسیک مقایسه کرد. شی رونگ لی و همکارانش (Li, S. Ret al, 2009) ارتعاشات آزاد یک تیر از جنس مدرج تابعی را با لایه های پیزوالکتریک را تحت افزایش دما و ولتاژ بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن مقدار دقیق کشش طولی و بر مبنای تئوری کلاسیک تیرها معادلات حرکت تیر را در شرایط بارگذاری الکتریکی و حرارتی به دست آوردند. ارتعاش یک تیر اوایلر برنولی که با پایه ی الاستیک نوع وینکلر ساپورت شده بود، توسط کازانی (A. Cazzani, 2013) مطالعه شده است. جواب ارتعاشات آزاد تیرهای پله ای که از مواد مدرج تابعی ساخته شده اند، توسط ناتاویت و همکارانش انجام شده است (Nuttawit et al, 2014). تیر آنها از دو انتها مهار الاستیسیته شده بود. حیدری و اسلامی (Heidary, F. and Eslami, 2006) کنترل ارتعاشات اجباری یک ورق کامپوزیتی ترموالاستیک را با پیزوالکتریک انجام دادند. معادلات حرکت را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده و از روش المان محدود برای حل استفاده کردند. عباس زاده و همکارانش (Abbaszadeh Bidokhti et al, 2006) کنترل فعال یک تیر از جنس مدرج تابعی با لایه های پیزوالکتریک حسگر و عملگر را بررسی کردند. معادلات حرکت بر پایه تئوری اوایلر-برنولی و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شد. در این تحقیق یک کنترلر در جلوگیری از ارتعاش تیر مدرج تابعی با استفاده از لایه های پیزوالکتریک نظیر حسگرها و عملگرها به کار برده شده است. تیر به یک جرم متمرکز دلخواه چسبیده و در معرض یک نیروی پیرو است، که آن می تواند سبب ناپایداری دینامیکی سیستم گردد. تیر در یک انتها متحرک و با یک فنر در انتهای دیگر مهار شده است. معادلات حاکم با استفاده از تکنیک لاگرانژ - ریلی - ریتز بدست آمده است. یک کنترلر جهت ولتاژ در عملگرهای پیزوالکتریک، برای کنترل ارتعاش سیستم طراحی شده است. اثرات پارامترهایی نظیر مقدار و محل جرم متمرکز، سختی فنر و توزیع مواد متغیر تیر، روی پایداری سازه تیر و اثر کنترلر، تفسیر خواهد شد.

## کلیات

### تیر مدرج تابعی

یک تیر مدرج تابعی با لایه های پیزوالکتریک را در نظر بگیرید. سطح زیرین تیر یک لایه فلزی و سطح بالایی یک لایه

سرامیک است. ناحیه ی بین دو سطح مخلوطی از مواد سرامیک و فلز با یک نسبت خاص وجود دارد که از رابطه زیر پیروی می کند:

$$P_{eff} = P_m g(z) + P_c (1 - g(z)), \quad (1)$$

که  $P_{eff}$ ،  $P_m$  و  $P_c$  حاکی از خصوصیات موثر مواد مدرج تابعی، فلز و سرامیک است.  $g(z)$  کسر حجم مواد متشکله تیر مدرج تابعی است که از قانون تابع توانی زیر مفروض شده است.

$$g(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h_f} \right)^n. \quad (2)$$

در این رابطه  $z \left( \frac{-h_f}{2} \leq z \leq \frac{h_f}{2} \right)$  جهت ضخامت تیر است و  $\frac{h_f}{2}$  ضخامت تیر مدرج تابعی است.  $n (0 \leq n \leq \infty)$  اندیس کسر حجم است که بیان کننده ی توزیع مواد در طول ضخامت تیر است. با استفاده از معادله (1) اثر مدول یانگ و چگالی تیر مدرج تابعی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\rho_f = \rho_m g(z) + \rho_c (1 - g(z)), \quad E_f = E_m g(z) + E_c (1 - g(z)). \quad (3)$$

چون نسبت پواسن فلز و سرامیک به شدت به هم وابسته اند، اثر نسبت پواسن تیر مدرج تابعی ثابت در نظر گرفته شده است.

#### معادلات حاکم بر حرکت

شکل (1) نشان دهنده یک تیر نوسانی با ساپورت متحرک است. تیر با عرض  $b$  و ضخامت  $h_f$  و طول  $L$  می باشد که جفت لایه های پیزوالکتریک به هر دو طرف آن چسبیده اند. هر لایه پیزوالکتریک با ضخامت  $h_p$ ، طول  $L_p$ ، عرض  $b_p$ ، چگالی  $\rho_p$ ، مدول یانگ  $E_p$  و ضریب پیزوالکتریک برابر  $e_{31}$  می باشد. چون مدول یانگ در طول ضخامت تیر تغییر می کند، محور خنثی تیر روی محور تقارن تیر قرار نمی گیرد که فاصله ی محور خنثی و محور تقارن به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\bar{z} = \left( \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} E_f(z) z dz \right) / \left( \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} E_f(z) dz \right). \quad (4)$$

سیستم مختصات جدید به صورت  $\xi = z - \bar{z}$  تعریف شده و بنابراین  $\xi = 0$  محور خنثی تیر می باشد. میدان جا به جایی یک تیر اویلر برنولی به این صورت می توان نوشت (Q. Wang and S. T. Quek, 2002):

$$u_x(x, t) = -\xi \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (5)$$

که  $w(x, t)$  و  $u_x(x, t)$  به ترتیب جا به جایی در جهت  $x$  و  $\xi$  می باشند. کرنش  $\varepsilon_x$  و تنش  $\sigma_x$  تیر نیز بدین صورت بیان می گردد:

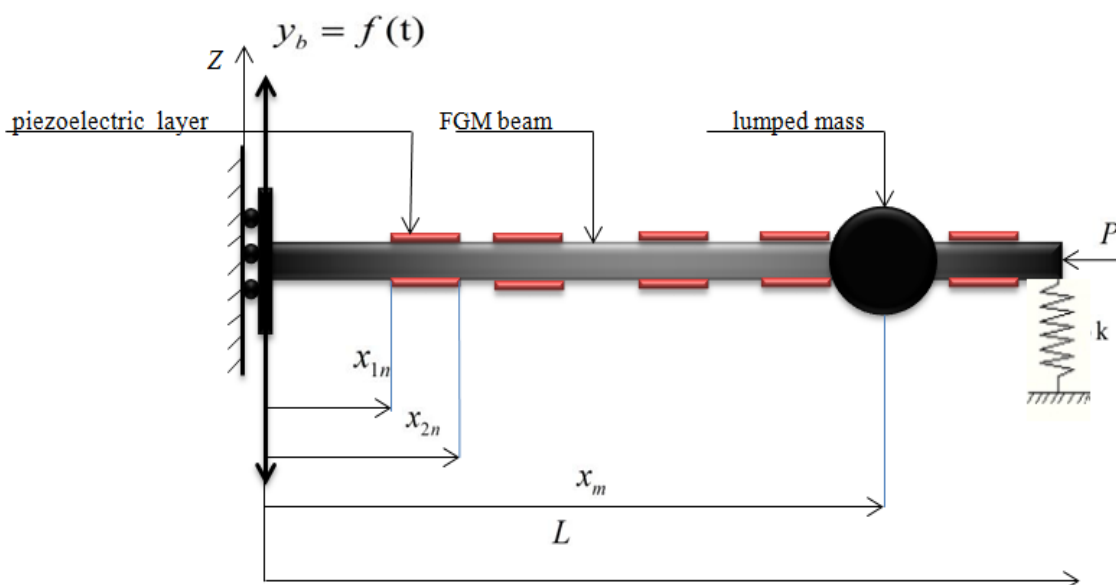
$$\sigma_x = -E_f(\xi) \xi \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x = -\xi \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

تنش در لایه های پیزوالکتریک را از روابط زیر بدست می آوریم (E. F. Crawley and J. Luis, 1987):

$$\sigma_{x_p} = -E_p \xi \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} - e_{31} E_z. \quad (7)$$

زیرنویس  $p$  حاکی از لایه های پیزوالکتریک،  $E_z$  میدان الکتریک در لایه های پیزوالکتریک و  $w_p(x, t)$  جا به جایی پیزوالکتریک در جهت  $z$  می باشد. چون لایه های پیزوالکتریک به تیر چسبیده اند،  $w_p(x, t)$  و  $w(x, t)$  هم ارزند. ترم

های اول و دوم طرف سمت راست معادله (7)، تنش های مکانیکی و الکتریکی متأثر از لایه های پیزوالکتریک می باشد.



شکل (1). تیر مواد مرتبه ای در معرض نیروی پیرو  $p$  با تکیه گاه متحرک.

همانگونه که در شکل (1) نشان داده شده، تیر طبق تابع  $y_b = f(t)$  در جهت  $z$  نوسان می کند. معادلات حاکم بر حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ بدست می آوریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T_b + T_p + T_m)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial(T_b + T_p + T_m)}{\partial q} + \frac{\partial(U_b + U_p + U_s)}{\partial q} = Q, \quad (8)$$

که  $T$  و  $U$  به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل،  $q$  مختصات بردار تعمیم یافته و  $Q$  نیروی تعمیم یافته است. زیر نویس های  $b$ ،  $p$ ،  $m$  و  $s$  به ترتیب حاکی از تکیه گاه تیر، لایه ی پیزوالکتریک، جرم متمرکز و فنر است. انرژی جنبشی سیستم را از روابط زیر بدست می آوریم:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} b \rho_f(z) (\dot{w} + \dot{y})^2 dz dx,$$

$$T_m = \frac{1}{2} \int_0^L m (\dot{w}(x, t) + \dot{y}(t))^2 \delta_D(x - x_m) dx = \frac{1}{2} m (\dot{w} + \dot{y})^2(x_m, t), \quad (9)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_0^L \int_{A_n} \rho_{p_n} (\dot{w} + \dot{y})^2 [H(x - x_{1_n}) - H(x - x_{2_n})] dA_n dx,$$

که  $b$  عرض تیر،  $N$  تعداد لایه های پیزوالکتریک،  $\rho_{p_n}$  چگالی لایه ی  $n$  ام پیزوالکتریک،  $x_{1_n}$  و  $x_{2_n}$  مختصات دو انتهای

لايه ی n ام پیزوالکتریک، m انداره جرم متمرکز و  $x_m$  محل جرم متمرکز است. (.) مشتق جزئی نسبت به زمان،  $H(x)$  و  $\delta D(x)$  توابع هویساید و دلتای دیراک هستند. با استفاده از معادله (۶) و معادله (۷) انرژی پتانسیل سیستم بدین صورت نوشته می شود:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} b \xi^2 E_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\xi dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (10)$$

$$U_s = \frac{1}{2} k w^2(L, t),$$

$$U_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{PZT_n} E_{p_n} \xi^2 \left( \frac{\partial^2 w_{p_n}}{\partial x^2} \right)^2 dv + \sum_{n=1}^N \int_{PZT_n} \xi e_{31} E_{z_n} \frac{\partial^2 w_{p_n}}{\partial x^2} dv + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{PZT_n} E_{z_n} d_n dv,$$

که  $d_n$  جا به جایی لایه ی n ام، k ثابت فنر می باشد. جابه جایی الکتریک را از رابطه زیر بدست می آوریم ۳۰:

$$d_n = \varepsilon_{p_n} \frac{v_n}{h_{p_n}}, \quad (11)$$

که  $\varepsilon_{p_n}$  ثابت غیر الکتریک مواد پیزوالکتریک لایه ی n ام می باشد. جهت بدست آوردن کار غیر پایستار انجام شده توسط نیروی پیرو از رابطه زیر استفاده می نمائیم:

$$W = P \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} w(L, t). \quad (12)$$

با دانستن قرار داد  $\delta w = Q^T \delta q$ ، به آسانی می توان نیروی تعمیم یافته را از معادله (۱۲) بدست آورد. به سبب پیچیدگی معادلات حاکم، حل را با یک روش حل تقریبی انجام می دهیم. در انتها جا به جایی w با مفهومی از سری توابع شکل بیان می شود، که باید شرایط مرزی را ارضاء نماید. این توابع در مختصات تعمیم یافته ضرب شده، و جا به جایی w به این صورت بیان می شود (L. Meirovitch, 1997):

$$w(x, t) = \sum \Phi_i q_i = \Phi^T q, \quad (13)$$

که  $\Phi$  و q به ترتیب شکل مود ها و مختصات تعمیم یافته می باشد. با جایگذاری معادله (۱۳) درون معادله (۹) و به کار بردن روش رایلی\_ریتز، معادلات دیفرانسیل معمولی را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$[M] \ddot{q} + [K] q = -(K_{P_{elastelect_a}} v_a + f_d \ddot{y}), \quad (14)$$

$$v_s = K_{P_{elect}}^{-1} K_{P_{elastelect_s}}^T q,$$

که  $M, K, v_a$  و  $v_s$  به ترتیب ماتریس های جرم، سختی، ولتاژ های عملگر و حسگر پیزوالکتریک اند و  $f_d$  بردار ناشی از پارازیت های خارجی است که به سیستم اعمال می گردد و در معادله (۱۷) تعریف می گردد. ماتریس [M] به این صورت بیان می شود:

$$M = M_b + M_p + M_m,$$

$$\begin{aligned}
 M_b &= \int_0^L \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} b \rho(z) \Phi(x) \Phi^T(x) dz dx, \\
 M_p &= \sum_{n=1}^N \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \rho_{p_n} b_{p_n} h_{p_n} \Phi(x) \Phi^T(x) dx, \\
 M_m &= m \Phi(x_m) \Phi^T(x_m),
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$f_d = \int_0^L \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} b \rho(z) \Phi^T(x) dz dx + \sum_{n=1}^N \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \rho_{p_n} b_{p_n} h_{p_n} \Phi^T(x) dx + m \Phi^T(x_m), \tag{17}$$

و ماتریس [K] بدین صورت:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_w, \\
 \mathbf{K}_b &= \int_0^L P \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \frac{\partial \Phi^T(x)}{\partial x} dx + \\
 &\int_0^L \int_{-\frac{h_f}{2}}^{\frac{h_f}{2}} b \xi^2 E(\xi) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi^T(x)}{\partial x^2} d\xi dx, \\
 \mathbf{K}_p &= \sum_{n=1}^N \iiint_{PZT_n} E_{p_n} \xi \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi^T(x)}{\partial x^2} dv, \\
 \mathbf{K}_s &= k \Phi(L) \Phi^T(L), \\
 \mathbf{K}_w &= -P \Phi(L) \frac{\partial \Phi^T(x)}{\partial x} \Big|_{x=L},
 \end{aligned} \tag{18}$$

در معادله (۱۴)  $\mathbf{K}_{P_{elastelct_1}}$  و  $\mathbf{K}_{P_{elastelct_2}}$  به ترتیب حاکی از ماتریس های موثر الاستیک\_الکترونیک لایه های حسگر و عملگر پیزوالکتریک اند.

$$\mathbf{K}_{P_{elastelct_1}} \text{ or } \mathbf{K}_{P_{elastelct_2}} = [K_{pee_1} \ K_{pee_2} \ \dots \ K_{pee_n}], \tag{20}$$

که  $K_{pee_n}$  برداری از ستون لایه n ام ماتریس الاستیک\_الکترونیک است.

$$K_{pee_n} = \frac{e_{31n}}{h_{fn}} \int_{PZT_n} \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dv. \tag{21}$$

اگر لایه های بالایی عملگر ها و لایه های پایینی حسگر ها باشند، برای هر جفت لایه پیزوالکتریک، معادله (۲۱) برای عملگر ها و حسگرها بدین صورت نوشته می شود:



$$\begin{aligned}
 K_{pee_n} |_{actuator} &= \frac{e_{31_n} b_{p_n}}{h_{p_n}} \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \int_{\frac{h_f}{2} - \bar{z}}^{\frac{h_f}{2} - \bar{z} + h_{p_n}} \xi d\xi dx \\
 &= \frac{e_{31_n} b_{p_n}}{h_{p_n}} J_{a_n} \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 K_{pee_n} |_{sensor} &= \frac{e_{31_n} b_{p_n}}{h_{p_n}} \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \int_{\frac{h_f}{2} - \bar{z} - h_{p_n}}^{\frac{h_f}{2} - \bar{z}} \xi d\xi dx \\
 &= \frac{e_{31_n} b_{p_n}}{h_{p_n}} J_{s_n} \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx,
 \end{aligned}$$

که

$$J_{a_n} = \int_{\frac{h_f}{2} - \bar{z}}^{\frac{h_f}{2} - \bar{z} + h_{p_n}} \xi d\xi, \quad J_{s_n} = \int_{\frac{h_f}{2} - \bar{z} - h_{p_n}}^{\frac{h_f}{2} - \bar{z}} \xi d\xi, \tag{23}$$

با در نظر گرفتن خصوصیات یکسان برای لایه های پیزوالکتریک، مقدار  $J_{s_n}$  و  $J_{a_n}$  برای هر عملگر و حسگر به ترتیب  $J_a$  و  $J_s$  می باشد. مطابق معادله (23) روشن است،  $\frac{J_a}{J_s}$  یک اسکالر منفی است. با استفاده از معادله های (21) و (23) رابطه بین ماتریس موثر الاستیک\_الکتریک عملگر ها و حسگر ها بدین صورت می باشد:

$$K_{P_{elastelect_s}} = \frac{J_s}{J_a} K_{P_{elastelect_a}}. \tag{24}$$

$K_{P_{elect}}$  یک ماتریس توانی (ظرفیت الکتریکی) قطری از لایه های پیزوالکتریک است.

$$K_{P_{elect}} = \sum_{n=1}^N \int_{PZT_n} \epsilon_{p_n} p_n p_n^T dv, \tag{25}$$

که بردار  $1 \times N$ ،  $p_n$  برای ورودی های  $n$  ام مقادیری غیر صفر و برابر با  $\frac{1}{p_n}$  دارد.

اگر ویژگی های همه ی لایه های پیزوالکتریک یکسان باشد، ماتریس توانی (ظرفیت الکتریکی) به صورت زیر خواهد بود:

$$K_{P_{elect}} = \epsilon_p L_p b_p I_{N \times N} = \frac{1}{\mu} I_{N \times N}, \tag{26}$$

که  $I_{N \times N}$  ماتریس همانی  $N \times N$  می باشد.  $L_p$  و  $b_p$  به ترتیب طول و عرض لایه های پیزوالکتریک اند، که همگی مثبت اند. اندازه  $\epsilon_p$  در جدول (1) آمده است. پس  $\mu$  یک عدد مثبت است.

## نتایج

حل معادلات حاکم به کمک روش ریلی - ریتز و با استفاده از توابع شکل انجام شده است. تابع شکل انتخاب شده به صورت می باشد (A. Gharib et al, 2008):



$$\Phi_i = \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^{1+i} \{6 + i^2(1 - \frac{\pi}{L})^2 + [5 - 6\frac{x}{L} + (\frac{x}{L})^2]\}}{i(1+i)(2+i)(3+i)}$$

تعداد توابع شکل مورد استفاده باید به گونه ای باشد که جواب مسئله مستقل از تعداد آنها باشد، لذا پس از بررسی تعداد توابع شکل، شکل تابع مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق تاثیر سختی فنر، نیروی پیرو، جرم متمرکز و اندیس کسر حجم بر روی ظرفیت پایداری و جواب سیستم مورد مطالعه قرار گرفته شده است. خصوصیات مواد مدرج تابعی و لایه های پیزوالکتریک در جدول (۱) آمده است و پارامترهای بدون بعد که در شبیه سازی به کار گرفته شده است به صورت زیر می باشد:

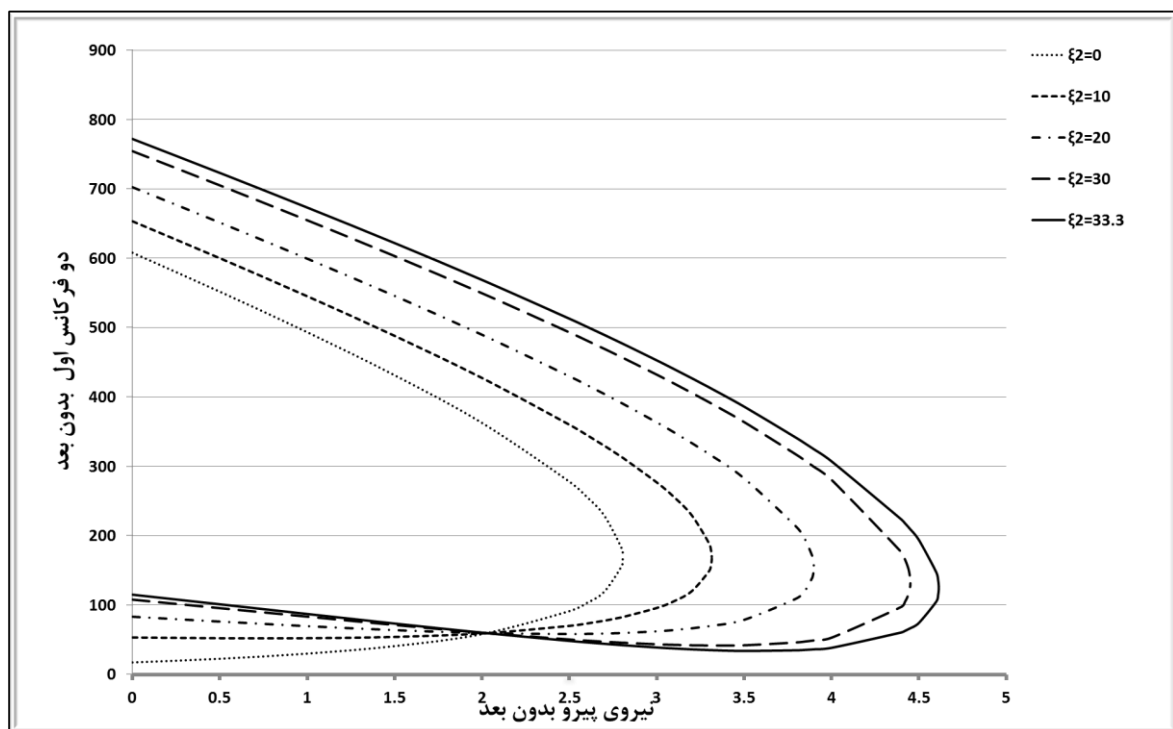
$$\bar{\omega} = \rho_m b h_f \frac{w^2 L^4}{E_m I_m} \quad \bar{m} = \frac{m}{m_b} \quad \zeta^2 = \frac{k L^3}{E_m I_m} \quad \bar{P} = \frac{P}{P_{cr}}$$

که  $m_b$  جرم تیر و  $P_{cr} = \frac{\pi^2 E_m I_m}{4L^2}$  بار خمشی تیر اولیه است که از جنس فلز باشد،  $\omega$  فرکانس طبیعی تیر و  $I_m$  ممان اینرسی تیر (که تیر به صورت همگن در نظر گرفته شده است) می باشد. در شبیه سازی طول، عرض و ضخامت تیر به ترتیب  $L = 1m$ ،  $b = 0.08m$  و  $h_f = 0.02m$  در نظر گرفته شده است. ضخامت هر لایه پیزوالکتریک  $h_p = 0.001$  می باشد و  $\zeta^2 = 0$  حاکی از تکیه گاه آزاد تیر است و  $\zeta^2 \rightarrow \infty$  حاکی از تیر تکیه گاه ثابت در انتهای تیر می باشد. خصوصیات مواد پیزوالکتریک در جدول (۱) آمده است. (A. Gharib et al, 2008)

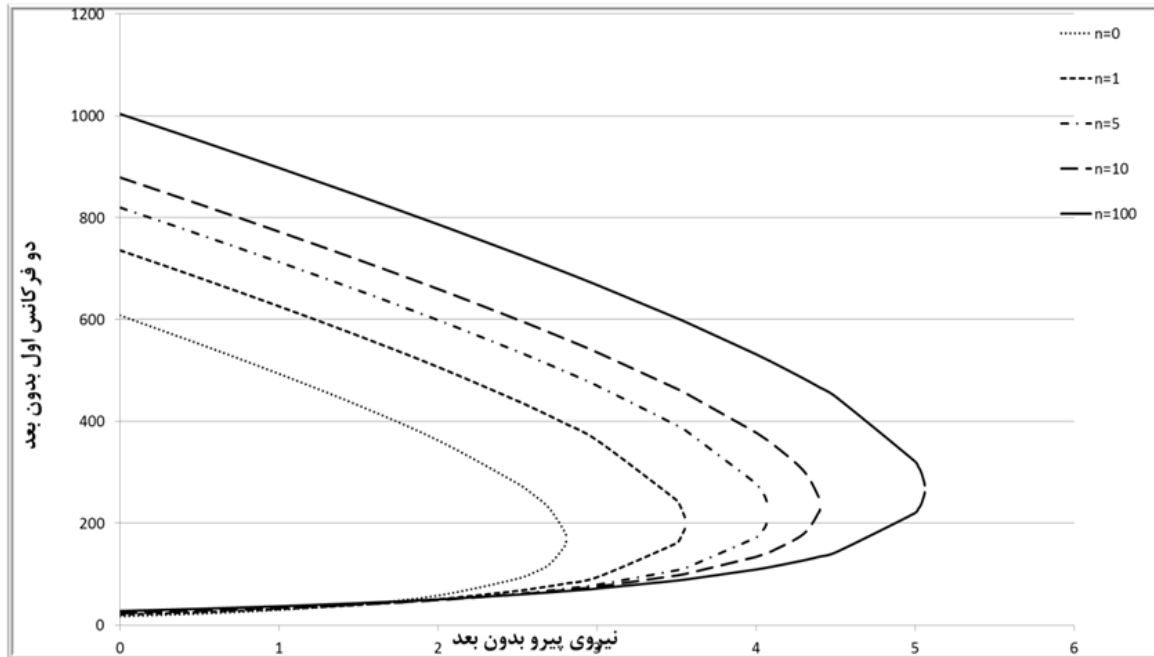
جدول (۴-۱). خواص مواد و ثابت ها

<u>مواد متشکله تیر مواد مرتبه ای</u>			
پارامترها	آلومنیوم (فلز)	زیرکونیا (سرامیک)	مواد پیزوالکتریک (PZT-5H)
$E_1(C_{11})(N/m^2)$	$70 \times 10^9$	$151 \times 10^9$	$99.2 \times 10^9$
$E_2(C_{22})(N/m^2)$	$70 \times 10^9$	$151 \times 10^9$	$76 \times 10^9$
$G_{12}(C_{55})(N/m^2)$	$26.9 \times 10^9$	$58 \times 10^9$	$21.1 \times 10^9$
نسبت پواسن	0.3	0.3	0.56
چگالی جرم ( $kg/m^3$ )	2707	3000	7700
ثابت دی الکتریک ( $nF/m$ )	-	-	25.55
ضریب معادل پیزوالکتریک ( $c/m^2$ )	$-e_{31}$	-	-16.6

در ابتدا یک تیر مواد مدرج تابعی بدون لایه های پیزوالکتریک و با اندیس کسر حجم صفر در نظر گرفته ایم. برای مقادیر مختلف  $\xi^2$  تغییرات دو فرکانس اول تیر  $\omega_1$  و  $\omega_2$  نسبت به  $\bar{P}$  در شکل (۲) ترسیم شده است. همانطور که از شکل پیداست برای  $\xi^2 \leq 33$  مقادیر  $\omega_1$  و  $\omega_2$  بدون عبور از صفر به هم رسیدند، که این نشان دهنده ارتعاشات تیر قبل از کمانش است. برای مقادیر بالاتر اولین کمانش را داریم. چون یک انتهای تیر آزاد است ما می توانیم نتیجه بگیریم که نتایج درست است. ارتعاشات دو فرکانس اول تیر نسبت به نیروی پیرو، برای مقادیر مختلف اندیس کسر حجم در شکل (۳) نشان داده شده است. از این شکل نیز دریافت می گردد که با افزایش مقدار اندیس کسر حجم ظرفیت ارتعاشی تیر افزایش می یابد و افزایش مقدار نیروی پیرو سبب افزایش ناپایداری ارتعاشی تیر می گردد. در این پژوهش فرض بر این است که ۶۰٪ از تیر را به کمک مواد پیزوالکتریک بیوشانیم و اثرات تعداد و سایز پیزوالکتریک را با قدرت یکسان، روی ارتعاشات تیر بررسی کنیم. در ادامه لایه های پیزوالکتریک را ابتدا به صورت یک لایه ی ۶۰ سانتی متری و سپس به صورت لایه های ۰/۱، ۰/۱۲، ۰/۱۵ و ۰/۲ متری روی تیر تقسیم می گردد و نهایتاً تاثیر اندیس کسر حجم، جرم و فنر نیز بررسی می شود. همچنین شرایط اولیه غیر صفر به صورت  $(q|_{t=0} = [1.5, 0, 0.1, 0, 0.2, 0.1]^T)$  و بهره کنترلر با  $k_p = \text{diag}[25000000]$  در نظر گرفته شده است. چون تاثیرات  $k_p$  نسبت به  $k_d$  در تقویت کنترلر بیشتر است مقدار  $k_d$  در تمام موارد به صورت  $k_d = 30I_{6 \times 6}$  ثابت فرض شده است.

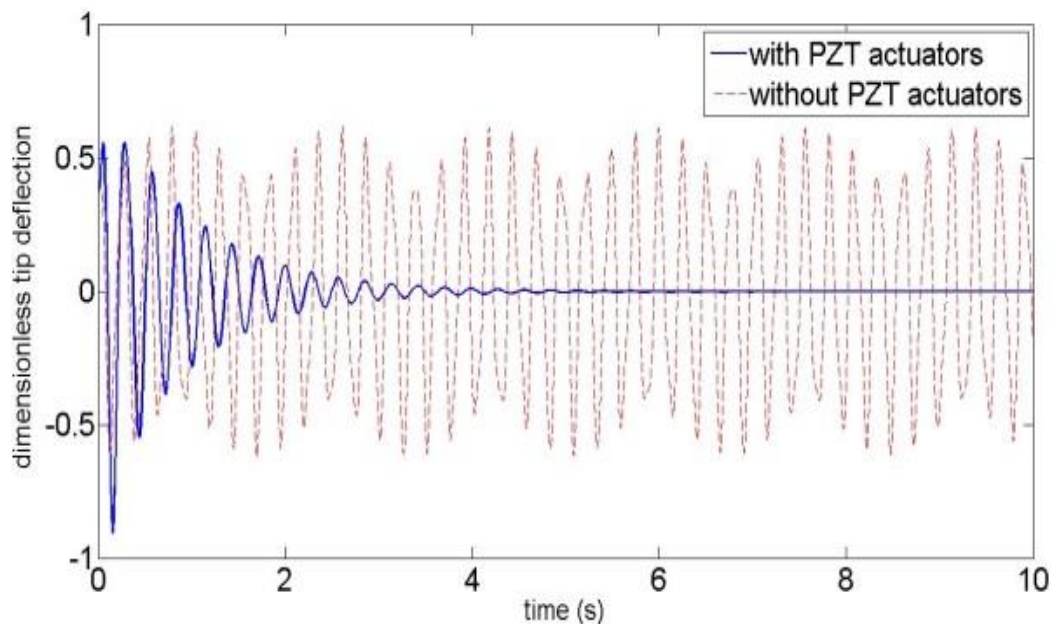


شکل (۲). دو فرکانس اول در معرض نیروی پیرو بدون بعد برای  $\eta=0$



شکل (۳). دو فرکانس اول در معرض نیروی پیرو بدون بعد برای  $\zeta^2 = 0$ .

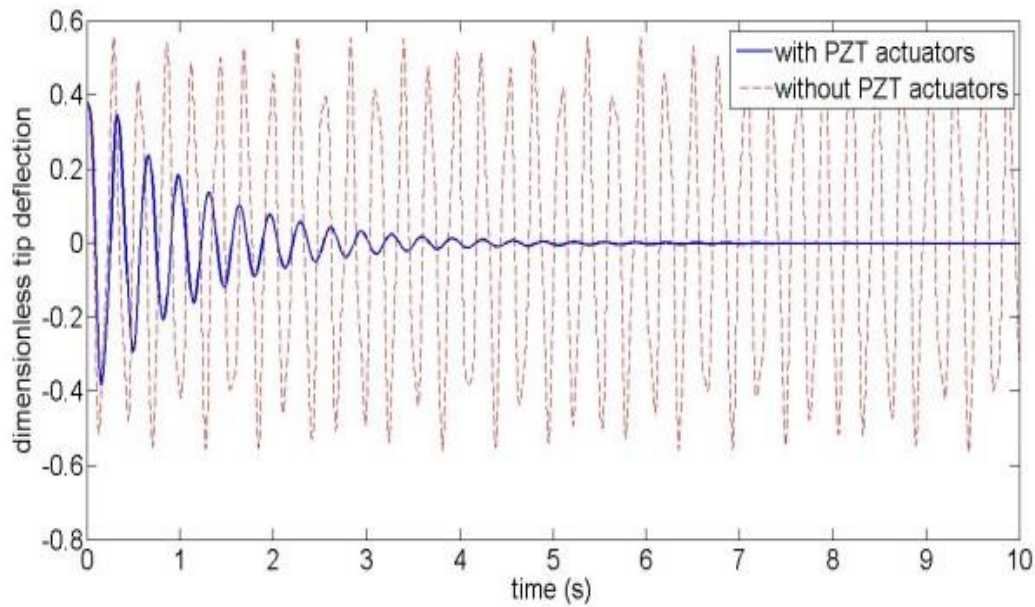
شکل (۴) نشان دهنده ارتعاشات تیری است که ۶۰٪ آن، توسط یک لایه پیزوالکتریک ۶۰ سانتی متری پوشانده شده است و پیزوالکتریک در موقعیت  $x_1 = 0, x_2 = 0.6$  می باشد.



شکل (۴). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L_p = 0.6$

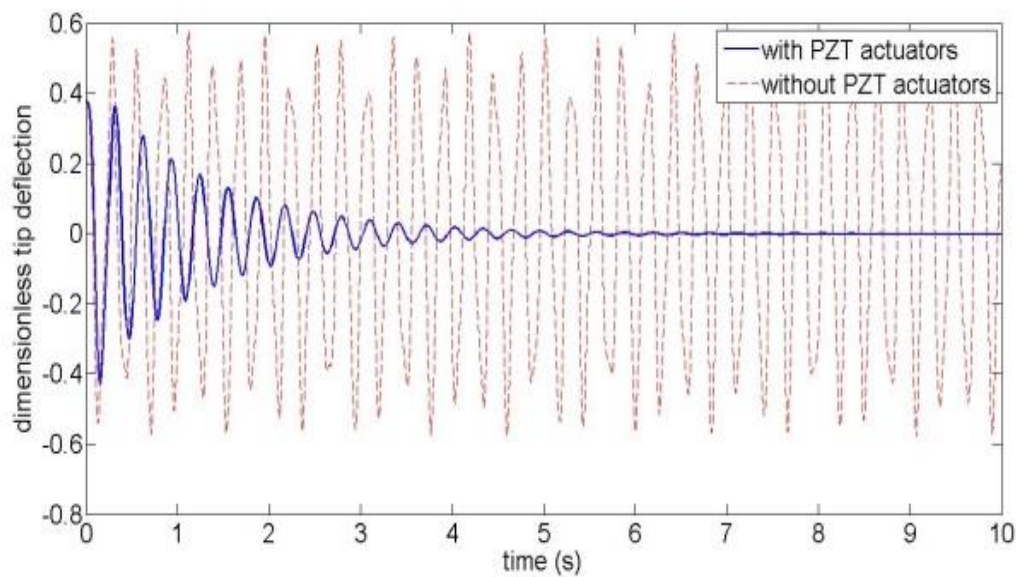
شکل (۵) نشان دهنده تیری است که ۶۰٪ آن، توسط سه لایه پیزوالکتریک به طول  $L_p = 0.2m$  پوشانده شده است و موقعیت لایه ها به ترتیب زیر است:

$$x_{1_1} = 0, x_{1_2} = 0.2m, x_{2_1} = 0.25m, x_{2_2} = 0.45m, x_{3_1} = 0.5m, x_{3_2} = 0.5m.$$



شکل (۵). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L_p = 0.2$

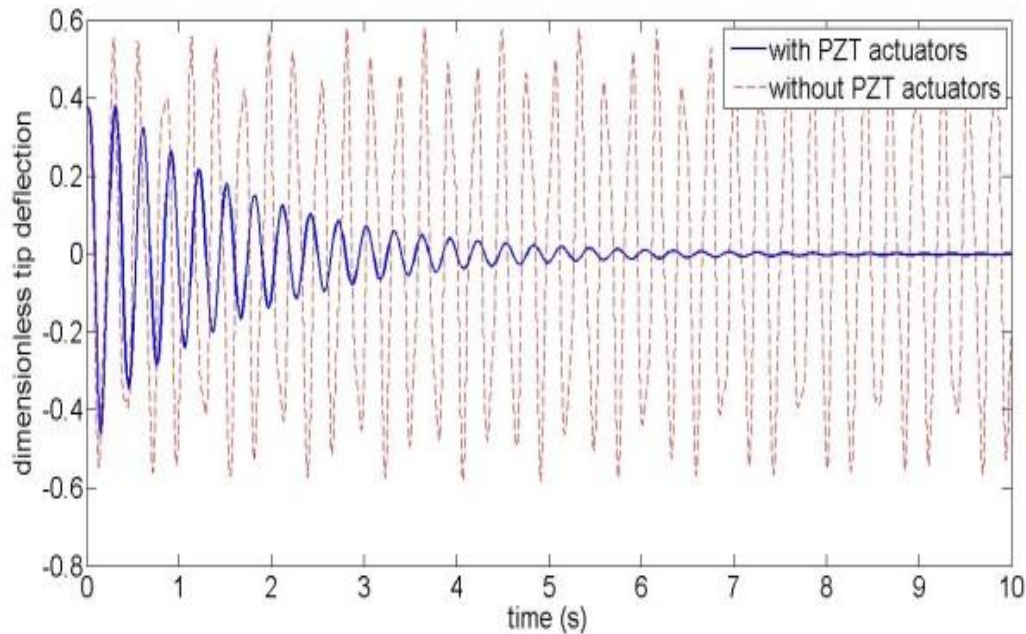
به همین ترتیب شکل (۶) با چهار لایه پیزوالکتریک به طول  $L_p = 0.15m$  و موقعیت لایه ها به ترتیب زیر است:  
 $x_{1_1} = 0, x_{1_2} = 0.15m, x_{2_1} = 0.2m, x_{2_2} = 0.35m, x_{3_1} = 0.4m, x_{3_2} = 0.55m, x_{4_1} = 0.6m, x_{4_2} = 0.75m$



شکل (۶). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L_p = 0.15$

شکل (۷) با پنج لایه پیزوالکتریک به طول  $L_p = 0.12m$  و موقعیت لایه ها به ترتیب زیر است:

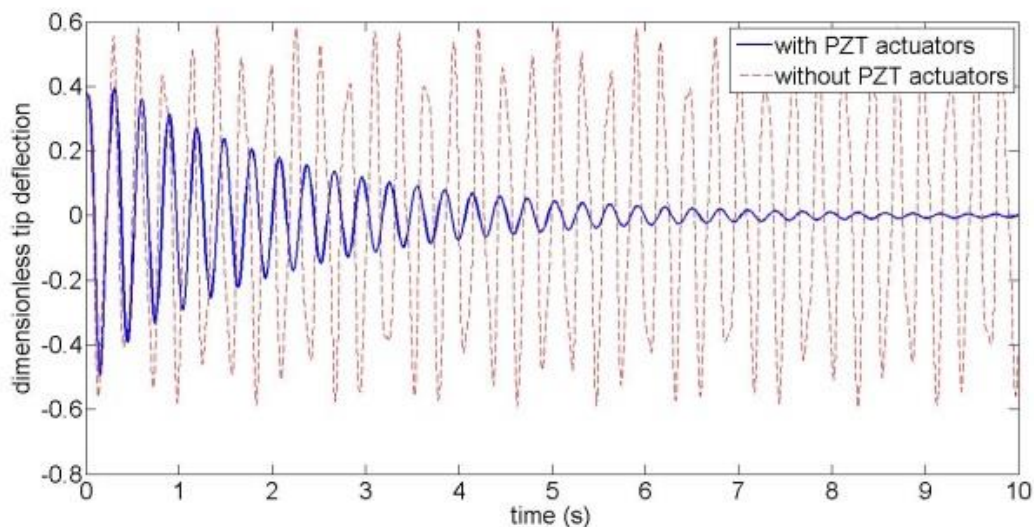
$$x_{1_1} = 0, x_{1_2} = 0.12m, x_{2_1} = 0.17m, x_{2_2} = 0.29m, x_{3_1} = 0.34, x_{3_2} = 0.46m, x_{4_1} = 0.51m, x_{4_2} = 0.63m, x_{5_1} = 0.68m, x_{5_2} = 0.8m$$



شکل (۷). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L_p = 0.12$

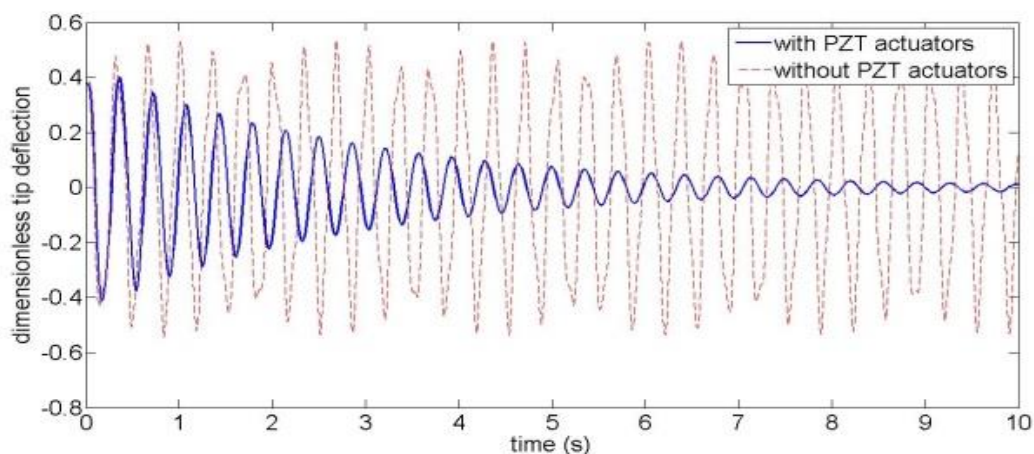
شکل (۸) با شش لایه پیزوالکتریک به طول  $L_p = 0.1m$  موقعیت لایه ها به ترتیب زیر است:

$$x_{1_1} = 0, x_{1_2} = 0.1m, x_{2_1} = 0.15m, x_{2_2} = 0.25m, x_{3_1} = 0.3m, x_{3_2} = 0.4m, x_{4_1} = 0.45m, x_{4_2} = 0.55m, x_{5_1} = 0.6m, x_{5_2} = 0.7m, x_{6_1} = 0.75m, x_{6_2} = 0.85m$$



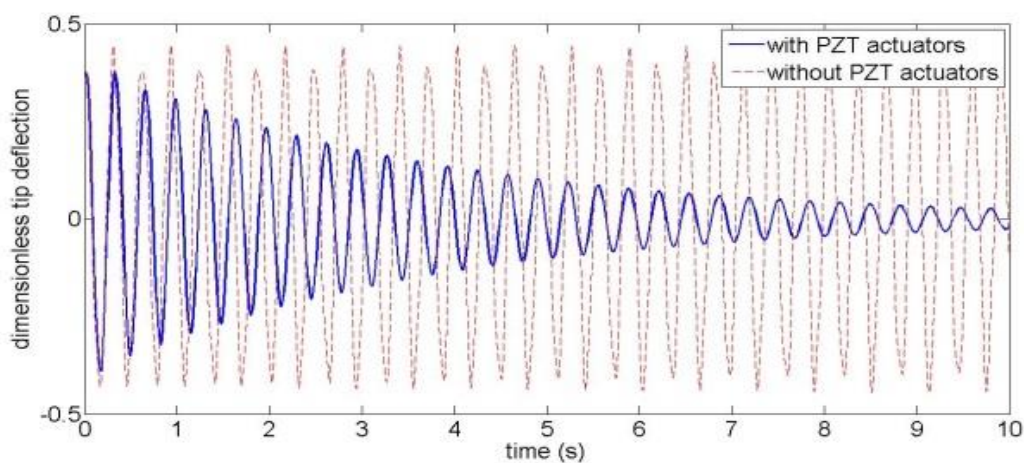
شکل (۸). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L_p = 0.1$

با مشاهده شکل (۴) به روشنی ملاحظه خواهد شد، که اگر یک لایه ی ۶۰ سانتی متری از پیزوالکتریک را جهت کنترل تیر به کار ببریم نیاز به یک کنترلر با  $k_p$  نسبتا بالایی است. شکل های (۵) تا (۸) حاکی از آن است که با تقسیم لایه پیزوالکتریک به لایه های کوچک تر می توان به کنترل بهتر با کنترلرهایی با  $k_p$  کوچکتر دست یافت. اما تقسیمات را تا محدوده خاصی می توان انجام داد چون تقسیم لایه ها به لایه های کوچکتر باعث ضعیف تر شدن قدرت پیزوالکتریک ها خواهد شد. در این موارد بهره کنترلر  $k_p = \text{diag}[8000000, 1500, 1500, \dots]$  در نظر گرفته شده است.



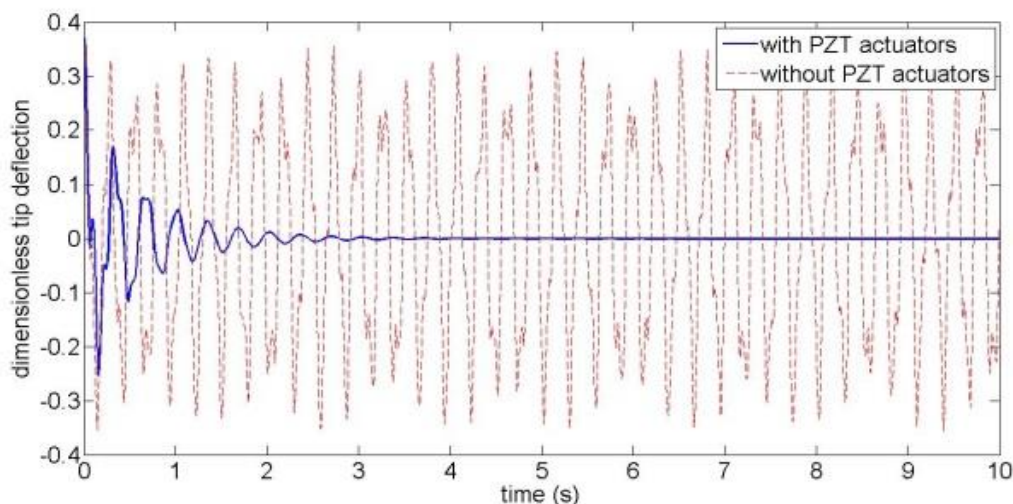
شکل (۹). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0.2, \bar{p} = 2.1, L_m = 0.72$ .

شکل (۹) اثر جرم مورد بررسی قرار گرفته است، به این صورت که یک جرم به مقدار  $\bar{m} = 0.2$  در فاصله ی  $x_m = 0.72$  از مبدا قرار گرفته است. با مقایسه این حالت با شکل (۸) مشاهده می گردد که بکار بردن جرم در فاصله  $x_m = 0.72L$ ، سبب افزایش دامنه ارتعاش می گردد و هر چه جرم را به  $L$  نزدیک تر کنیم سبب افزایش دامنه ارتعاشی تیر می گردد. در شکل (۱۰) اثرات اندیس کسر حجم مورد بررسی قرار گرفته است. در این نمونه واضح است که با به کار بردن تیر مواد مدرج تابعی با  $n=10$  دامنه ارتعاش افزایش می یابد که به طرق مختلف می توان دامنه ارتعاش را کاهش داد و به نحوی تیر را تحت کنترل درآورد. که برخی از این موارد عبارتند از: استفاده از یک فنر با سختی مناسب و استفاده از لایه های پیزوالکتریک تقویت شده است.



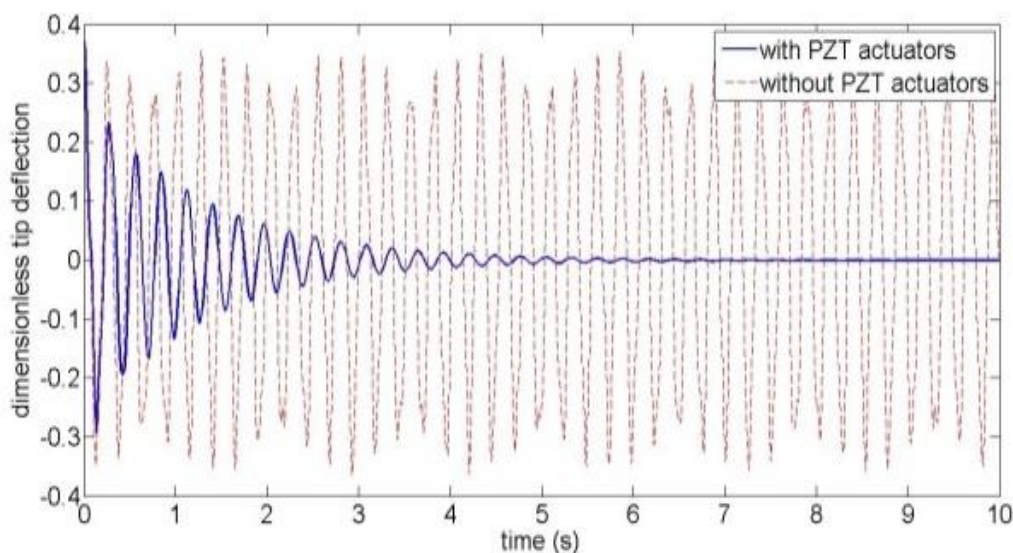
شکل (۱۰). ارتعاشات تیر برای  $n = 10, \zeta^2 = 0, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L = 0.1$ .

اثر  $\zeta^2 = 33$  در شکل (۱۱) قابل رویت می باشد.  $\zeta^2 = 33$  حداکثر مقدار سختی فنر قبل از کمانش می باشد که می توانیم به سیستم اعمال نمائیم. در این شکل اثر فنر را در ارتعاشات تیر به خوبی مشاهده می نمائیم.



شکل (۱۱). ارتعاشات تیر برای  $n = 0, \zeta^2 = 33, \bar{m} = 0, \bar{p} = 2.1, L = 0.1$

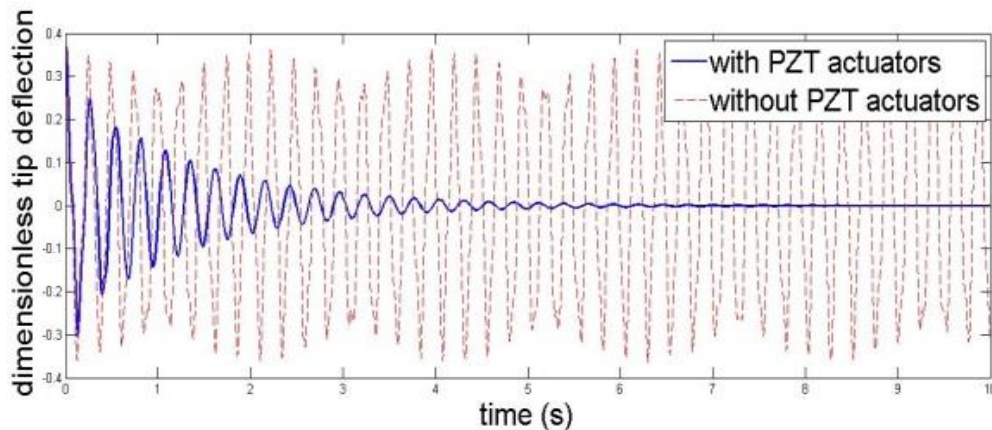
در ادامه تیری را در نظر می گیریم که همه موارد (اثرات فنر، جرم، اندیس کسر حجم، نیروی پیرو و تعداد پیزوالکتریک ها) را در بر داشته باشد. شکل (۱۲). با مقایسه شکل (۴) و (۱۲) این موضوع دریافت می گردد، با داشتن یک تیر مواد مدرج تابعی که جرم متمرکز در مکان مناسب و فنر به انتهای آن متصل شده باشد و در معرض یک نیروی پیرو قرار گیرد، می توان با تقسیم لایه ی پیزوالکتریک به چند لایه، با بهره کنترلر ( $k_p$ ) کوچکتر، ارتعاشات تیر را کنترل نمود.



شکل (۱۲). ارتعاشات تیر برای  $n = 10, \zeta^2 = 33, \bar{m} = 0.2, \bar{p} = 2.1, L = 0.1$

در اینجا می خواهیم تاثیر تعداد شکل مد ها را بر ارتعاشات سیستم بررسی کنیم. در حالت های قبلی تعداد ۶ مد خمشی را انتخاب کرده بودیم، تعداد شکل مد ها را به ۳ عدد کاهش می دهیم. با رسم شکل در حالت گفته شده و مقایسه با شکل (۱۳)

در می یابیم که تغییر محسوسی در انحراف تیر و ارتعاشات آن رخ نداده است. پس در نتیجه کاهش تعداد توابع شکل تا سه عدد تاثیر چندانی بر پاسخ سیستم ندارد.



شکل (۱۳). ارتعاشات تیر برای ۳ عدد مد خمشی.

در شکل (۱۴) مقدار بهره کنترلر مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به شکل مشاهده می گردد، هر چند با انتخاب بهره های مختلف کارایی کنترلر تغییر می کند ولی در همه موارد ارتعاشات میرا می گردد و این عملکرد مناسب کنترلر را نشان می دهد.

در شکل حاضر مقدار  $k_p$  در هر نمونه به صورت زیر است:

نمونه (۱)

$$k_p = \text{diag} (20000000, 1500, 1500, 1500, 1500, 1500)$$

نمونه (۲)

$$k_p = \text{diag} (15000000, 1500, 1500, 1500, 1500, 1500)$$

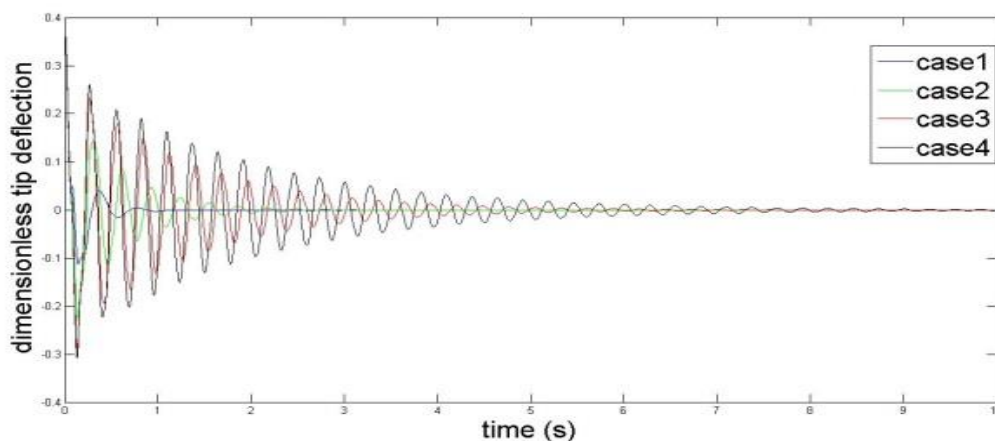
نمونه (۳)

$$k_p = \text{diag} (10000000, 1500, 1500, 1500, 1500, 1500)$$

نمونه (۴)

$$k_p = \text{diag} (8000000, 1500, 1500, 1500, 1500, 1500)$$

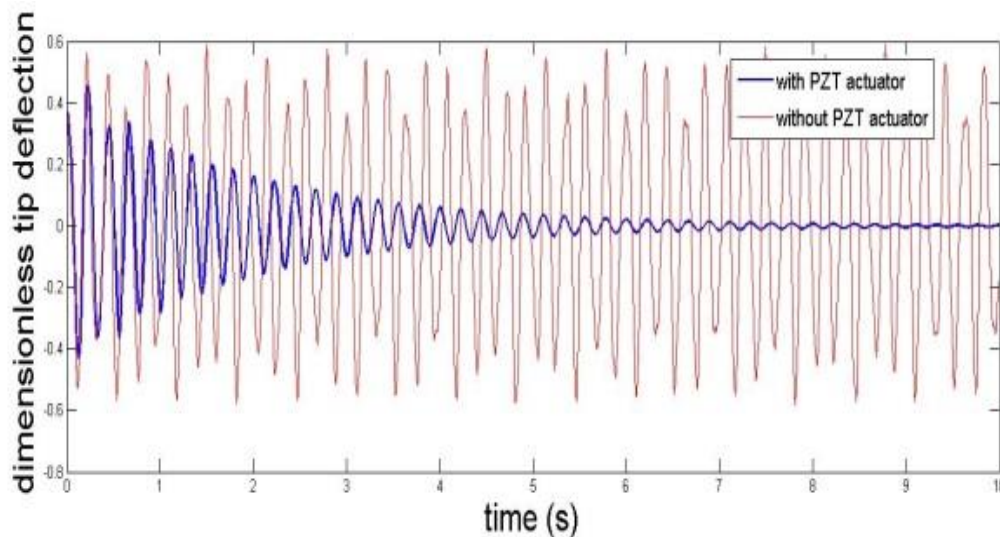
می باشد.



شکل (۱۴). ارتعاشات تیر برای کنترلر با بهره های متفاوت.

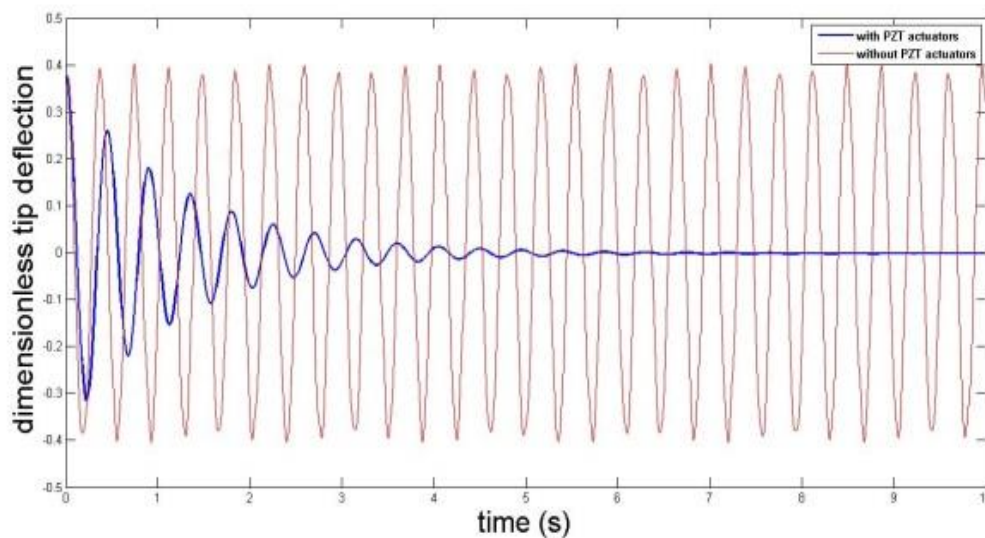


شکل (۱۵) معرف حالتی است که  $\bar{p} = 6.1$  و  $k_p = \text{diag}(8000000, 1500, 1500, 1500, 1500, 1500)$  از این شکل نتیجه می شود که با به کار بردن بار بحرانی بالاتر از  $2/1$  کنترلر توانسته است به خوبی ارتعاشات تیر را میرا نماید.



شکل (۱۵). ارتعاشات تیر برای حالتی که  $\bar{p} = 6.1$ .

اگر تیر فقط از یک ماده مدرج تابعی با اندیس کسر حجم  $n=33$  باشد، بدون در نظر گرفتن فنر و جرم متمرکز باشد و یک نیروی پیرو به شدت  $\bar{p} = 1$  قرار گیرد در این صورت ارتعاشات تیر به صورت شکل (۱۶) خواهد بود.



شکل (۱۶). ارتعاشات تیر مندرج تابعی با  $n=33$ .

### نتیجه گیری

در این پایان نامه ارتعاشات یک تیر مواد مدرج تابعی به کمک یک کنترلر فعال، بررسی و تاثیر اندازه و محل پیزوالکتریک ها بر روند کنترل تیر مورد مطالعه قرار گرفت. تیر از یک انتها دارای تکیه گاه متحرک و از انتهای دیگر، با یک فنر مهار الاستیک شده است. لایه های پیزو الکتریک در هر دو طرف تیر (بالا و پایین) چسبیده اند که معرف حسگر و عملگر می باشند. یک نیروی پیرو در انتهای تیر و یک جرم متمرکز که می تواند در نواحی مختلفی از تیر قرار گیرد، بکار برده شده است. با استفاده از روش ریلی- ریتز معادلات حاکم بر حرکت بدست آمد. ابتدا اثرات تقسیم لایه های پیزوالکتریک به لایه های کوچکتر بررسی گردید و در ادامه اثرات سختی فنر، اندیس کسر حجم و جرم متمرکز مورد مطالعه قرار گرفت و نهایتاً سیستم شبیه سازی

شده و ارتعاشات سیستم برای نمونه های مختلف بیان شد. شبیه سازی نتایج، مصداق برتری، کارایی و فواید کنترلر مطرح شده است که می توان با تقسیم کنترلر به لایه های کوچکتر در فواصل مناسب به کنترلر بهتری دست یافت. در کنترل ارتعاشات تیر اعمال و انتخاب شرایط مرزی و اولیه تاثیر مهمی بر کنترل تیر دارد و همچنین از این پژوهش دریافت شد که انتخاب وزن و محل قرار گیری جرم متمرکز در کنترل ارتعاشات تیر تاثیر بسزایی دارد.

## منابع

- M.Koizumi, FGM activities in Japan, Composites Part B 28B (1997) 1–4.
- Z.F. Shi, Y. Chen, "Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load", *Archive of Applied Mechanics* 74 (2004) 3–4.
- S.C.Pradhan,"Vibration suppression of FGM composite shells using embedded magnetostrictive layers", *International Journal of Solids and Structures*. 42 (2005)2465–2488.
- S.C. Pradhan, C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy, "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shell under various boundary conditions", *Applied Acoustics* 61 (1)(2000)111–129.
- S. Suresh and A. Mortensen, "Fundamentals of Functionally Graded Materials", IOM Communications Limited, London, UK, 1998.
- A.A.jafari and m.fathabadi, "Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load", *Measej*. 9 (2) (2013) 69-77.
- S.C. Pradhan and T. Murmu "Thermo mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*. 321 (2009) 342–362.
- J. Murina, M. Aminbaghaib, V. Kutis " Exact solution of the bending vibration problem of FGM beams with variation of material properties", *Engineering Structures*. 32 (2010) 1631-1640.
- M. Filippi , Daoud S. Mashat , E. Carrera Ashraf. Zenkour and Sadah. Al Khateeb , " Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements ", *Composites. Part B* 59 (2014) 269–278.
- Noureddine Ziane ,Sid Ahmed Meftah, Hichem Abdeselem Belhadj, Abdelouahed Tounsi, ElAbbas Adda Bedia," Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams", *International Journal of Mechanical Sciences*. 66 (2013) 273–282.
- Nuttawit Wattanasakulponga, Variddhi Ungbhakorn," Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerospace Science and Technology*. 32 (2014) 111–120.
- J. Murin, M. Aminbaghai , V. Kutis," Modal analysis of the FGM-beams with continuous transversal symmetric and longitudinal variation of material properties with effect of large axial force", *Engineering Structures*. 34 (2012) 314–329.
- S. A. Fazlzadeh, M. Eghtesad and M. Azadi, "Buckling and flutter of a column enhanced by piezoelectric layers and lumped mass under a follower force", *Int. J. Struct. Stabil. Dynam*. 10(5) (2010) 1083–1097.
- H. Ahmadian and H. Azizi, "Stability analysis of a nonlinear jointed beam under distributed follower force", *J. Vib. Control*. 17(1) (2011) 27–38.
- S. A. Fazlzadeh and M. A. Kazemi-Lari, "Stability analysis of partially loaded Leipholz column carrying a lumped mass and resting on elastic foundation", *J. Sound Vib*. (2012).
- A. Gharib, M. Salehi and S. Fazeli, "Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators", *Mater. Sci. Eng*. 498(1) (2008) 110–114.
- S. Li, H. Su and C. Cheng, "Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment", *Appl. Math. Mech*. 30(8) (2009) 969–982.
- M. Şimşek, "Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories", *Compos. Struct*. 92(4) (2010) 904–917.
- D. Wei, Y. Liu and Z. Xiang, "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks", *J. Sound Vib*. 331(7) (2011) 1686–1700.
- Vahid Azadi, Mohammad Azadi, S.Ahmad Fazlzadeh and Emad Azadi, "Active control of a FGM beam under follower force with piezoelectric sensors/actuators", vol. 14,2013, pp.1-19.
- J. Murin, M. Aminbaghai and V. Kutis," Modal analysis of the FGM -beams with continuous transversal symmetric and longitudinal variation of material properties with effect of large axial force", *Engineering Structures*. 34 (2012) 314–329.

Simsek M. and Kocatürk, T. “Free and Forced Vibration of Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic Load”. *Composite struct.*, Vol. 90, No.4, pp. 465-473, 2009.

Simsek, M. “Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam Under Action of a Moving Harmonic Load”, *Composite Struct.*, Vol. 92, No. 10, pp. 2532–2546, 2010.

Li, S.R., Batra R.C., and Lian-Sheng Ma. “Free Vibration of Functionally Graded Material Beams with Surface-Bonded Piezoelectric Layers in Thermal Environment”, *Applied Mathematics and Mech. (English Edition)*, Vol. 30, No. 8, pp. 969–982, 2009.

A. Cazzani, On the dynamics of a beam partially supported by an elastic foundation: an exact solution-set, *Int. J. Struct. Stabil. Dynam.*(2013),doi:10.1142/S0219455413500454.

Nuttawit Wattanasakulpong, Kittisak Suddoung and Jarruwat Charoensuk," Vibration response of stepped FGM beams with elastically end constraints using differential transformation method", *Applied Acoustics*. 77 (2014) 20–28.

[27] Heidary, F. and Eslami, M.R. “Piezo-Control of Forced Vibrations of a Thermoelastic Composite Plate”, *Composite Struct.*, Vol. 74, No. 1, pp. 99–105, 2006.

Abbaszadeh Bidokhti, A., Sadough Vanini, A., and Eslami, M.R. “Active Control of Piezo- FGM Beams”, *MATERIAUX Dijon France*, 13-17 November 2006.

Q. Wang and S. T. Quek, Enhancing flutter and buckling capacity of column by piezoelectric layers, *Int. J. Solids Struct.* 39 (2002) 4167–4180.

E. F. Crawley and J. Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA J.* 25 (1987) 1373–1385.

L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibrations* (Prentice-Hall, New Jersey,1997).