# برنامه ریزی درجه دوم برای بهینه سازی سبد سهام

**سمانه مصطفوی**
samanehmostafavi66@gmail.com
**سید یونس جلائی خادمی**
y.jalae@yahoo.com

**چکیده**

بهینه سازی سبد سهام یک روش برای تولید ترکیبِ سبد سهام است که بالاترین بازده را به ازای سطح ریسکِ (احتمال ضرر) داده شده و یا حداقلِ ریسک برای سطح بازده‌ی داده شده، نتیجه می‌دهد. این مسئله می تواند به عنوان یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم فرموله شود. باید یک روش بهینه سازیِ جدید و کارآمد با بهره‌گیری از ساختار خاصی از مسئله‌ی انتخاب سبد سهام ارائه دهیم. این روش فرمولاسیون نشان می دهد که راه حل مساله؛ برداری فشرده است و با تناسب خوبی با استفاده از کامپیوترهای پیشرفته و ابر رایانه های اخیر بدست می آید، یعنی پردازندش برداری.

در ادامه ریسکِ بازدهی سبد سهام را با واریانسِ آن نشان خواهیم داد، این مسئله به عنوان حداقل رساندن ریسک در ارتباط با یک نرخ بازدهی داده شده در یک مدل استاندارد، بیان می شود.در نهایت شایان ذکر است راه حل ما شامل بسیاری از درایه های ماتریسی و برداری است چرا که آن بر روی یک سیستم معادلات خطی اجرا می شود و نه یک جدول سیمپلکس.

**واژگان کلیدی:** بهینه سازی سبد سهام، انتخاب سبد سهام، تخصیص دارایی ها، برنامه‌ریزی درجه دوم، روش میانگین- واریانس.

### مقدمه

بهینه سازی سبد سهام یک مسئله‌ی کلاسیک، برای راه‌حل‌های پیشنهاد شده بر اساس تنوع بخشیِ دارایی ها به منظور کاهش ریسک‌ها است و بهینه سازی برای استفاده‌ی بهینه از روابط آنها می‌باشد. هدف از بهینه سازی سبد سهام، ایجاد یک مجموعه (سبد سهام) است که بالاترین سطحِ بازدهی برای هر سطح از ریسک و یا پایین ترین سطح از ریسک برای سطح مطلوب از بازدهی را ارائه می‌دهد. و همچنین برای نشان دادن ریسک به عنوان واریانسِ بازده پیشنهاد شده است. این مسئله می تواند به عنوان یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم فرموله شود. راه حلی برای بهینه سازی سبد سهام را می توان در آثار پی در پی روی راه حل بهینه سازی درجه دوم بر اساس روش سیمپلکس یا بر اساس روش دوگانه (دوآل) برای برنامه ریزی خطی یافت. بررسی های خوبی برای برنامه‌ریزی درجه دوم می توان یافت. تلاش هایی  نیز در مورد فرمول‌سازی انتخاب سبد سهام برای ساختن راه حل واقع بینانه تر، صورت گرفته است. با این حال، هیچ روش واقعی جدید و موثری برای برنامه ریزی درجه دوم وجود ندارد که بتواند پردازش و ایجاد یک ابزار تعاملی و در نتیجه مفید برای سرمایه گذاران را تسریع بخشد. اخیراً، با ظهور ابر رایانه ها و فشار رقابت از سوی بازار های مالی، این مسئله مجدداً بسیار مورد توجه قرار گرفته است. هدف از این مقاله معرفی یک الگوریتم جدید برای راه حل های برنامه‌ریزی درجه دوم با هدف قرار دادنِ بهینه سازی سبد سهام است.

### بهینه‌سازی سبد سهام

اگر بتوان ریسکِ بازدهی سبد سهام را با واریانسِ آن نشان داد، این مسئله می‌تواند به عنوان حداقل رساندن (مینیمم‌سازی) ریسک در ارتباط با یک نرخ بازدهی داده شده در یک مدل استاندارد، بیان شود (Markowitz, 1989):

$$v = X'AX \quad (۱)$$

$$R = \sum x_i r_i \quad (۲)$$

$$\sum x_i = 1 \quad (۳)$$

$x_i \geq 0$ ( فروش‌های کوتاه مجاز نیست) (۴)

که در آن V واریانس و یا ریسک است؛ A ماتریس واریانس-کوواریانس است؛ $X' = (x_۱ x_۲ \dots x_n)$ ترکیبِ سبد سهام است؛ R نرخ بازدهیِ سبد سهام است و $r_i$ نرخ بازدهی دارایی $i$ می‌باشد.

فرض کنید در این قسمت محدودیت ۴ را در نظر نگیریم. راه‌حلِ به‌دست آمده توسط روش لاگرانژ می‌تواند به‌صورت زیر فرموله شود:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ R \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

که در آن

$$B' = \begin{bmatrix} 1,\ldots,1 \\ r_1,\ldots,r_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$ و $\lambda_2$ ضرب‌کننده‌های لاگرانژ هستند؛ و 0 ماتریس یا بردارِ ضرایب صفر است. حل این ترکیبِ سبد سهام به‌صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ R \end{bmatrix} \qquad (6)$$

که در آن $W = -(B'A^{-1}B)^{-1}$، $Y = -A^{-1}BW$ ، ترکیب سبد سهامِ بهینه به‌صورت زیر است:

$$X = [Y]\begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \qquad (7)$$

"خط فاصل کارآمد" یا "مجموعه‌ی کمترین واریانس" به‌صورت زیر است:

$$V = -\lambda_1/2 - (\lambda_2/2)R \qquad (8)$$

از ۶ و ۸ واضح است که خط فاصل کارآمد یک تابع مرتبه دوم از بازدهیِ سبد سهام است، بعنوان مثال یک سهمی تکه‌ای می باشد. در واقع، n معادله‌ی اول در ۵ ، توابع مطلوبیت نهایی n دارایی‌ها هستند (Sharpe, ۱۹۸۵). مفهوم فیزیکیِ ضرب‌کننده‌های لاگرانژ در اینجا واضح هست. $-\lambda_2$ تلورانسِ ریسک است، و می‌تواند بعنوان تجارت کساد بین ریسک و بازده و یا قیمتِ واحد بازدهی هر واحد ریسک باشد. نسبتِ $-\lambda_1/\lambda_2$، مطلوبیت نهاییِ سبد سهام است. می توان ثابت کرد که این مطلوبیت نهایی نرخ بدون ریسک است که مرتبط است با مجموعه ای کارآمد که دارای بازده‌ی R است. توجه داشته باشید که این نرخ بدون ریسک مانع خط مجموعه بازار سرمایه و محور بازدهی است (ریسک صفر). در راه حل فوق ممکن است یک مجموعه با $x_i$ منفی داشته باشیم چرا که محدودیت ۴ را در نظر نگرفته ایم. اگر زیر مجموعه ای از m سرمایه با $n \geq m$ وجود داشته باشد که دارای $x_i$ راه حل باشد که همگی غیر منفی باشند، آنگاه آن راه حل، راه حل بهینه برای آن زیر مجموعه است و یک راه حل عملی برای مساله‌ی اصلی است. همچنین این راه حل می‌تواند برای مساله‌ی اصلی بهینه شود اگر هیچ تابع مطلوبیت نهایی راجع به هر یک از $x_i$ بازده های سرمایه وجود نداشته باشد که ارزش بالاتری نسبت به نرخ بدون ریسک در ارتباط با گام بعدی جستجوی یک راه حل عملی برای این مساله‌ی اصلی است. به جای محوریابی درونی و بیرونی جدول سیمپلکس متغیرهای منحصر به فرد اگر نه، این نیز راه حل بهینه ای برای مساله ی اصلی است، اگر وجود داشته باشد. دوباره همه‌ی این سرمایه ها را در ماتریس راه حل قبلی برای ایجاد یک ماتریس

جدید وارد می کنیم، و این روند تا زمانی که راه حل بهینه بدست آید، ادامه پیدا می کند. این فرایند تأیید مجدد به این منظور طراحی شده است که اطمینان حاصل شود که هیچ یک از سرمایه ها را در طول ساده سازی و فرایندهای حذف کامل از دست نمی دهیم و از هیچ یک صرفنظر نمی‌کنیم. البته هر تکرار تأیید مجدد، راه حل را بهبود خواهد داد.

راه حل بهینه وجود دارد، بنابراین همگرایی محفوظ است. تمام فرایند را می توان به شرح طسر خلاصه کرد.

آغاز

۱. ساده سازی ماتریس اصلی
۲. حذف بزرگ برای به دست آوردن یک را حل عملی
۳. تایید مجدد نرخ بدون ریسک با توجه به مطلوبیت نهایی
(I) اگر هیچ بهبودی امکان پذیر نباشد، خروج

(II) دیگری، وارد کردن مجدد در ماتریس راه حل تمام سرمایه ها که مطلوبیت نهایی آنها بالاتر از نرخ بدون ریسک مجموعه ی عملی است ، بازگشت به ۲

پایان

**یافته ها**

با حل چند مثال نیز می‌توان مشاهده کرد که، راه حل ما شامل بسیاری از درایه های ماتریسی و برداری است چرا که آن بر روی یک سیستم معادلات خطی اجرا می شود و نه یک جدول سیمپلکس.

این مسئله در مقیاس بزرگ می تواند به راحتی به منظور استفاده از پردازش موازی تکنولوژی سخت افزار جدید پردازنده بردار جهت یابی شود.

**بحث و نتیجه‌گیری**

تفاوت های بین رویکرد ما و راه حل نوع سیمپلکس عبارتند از: (الف) راه حل عملی اولیه‌ی ما مبنایی است؛ (ب) ما از حذف و درج عظیم به جای محوریابی تکی استفاده می کنیم؛ (پ) قاعده تایید ساده، بر اساس ساختار مساله برای سرعت بخشیدن به این روش کار است. در فرمول بندی فوق، از مدل استاندارد مارکوویتز استفاده کردیم (Markowitz, 1989).

در واقع محدودیت های دیگر، مانند سطح سهام سرمایه، بازده نقدی، ردیابی شاخص و غیره، باید گنجانده شود تا مساله واقع گرایانه تر باشد. محدودیت های خطی دیگر را می توان به راه حل فوق اضافه کرد. هر محدودیت، یک سطر و ستون به ماتریس اضافه خواهد کرد. و پردازش هنوز هم یکسان است. روش بالا جزییات محدودیت های ۲ و ۳ مجموعه را برای حل مسئله‌ی برنامه ریزی درجه دوم به عنوان یک سیستم معادلات خطی در نظر گرفته

است کـه مسـئله برنامـه ریـزی درجـه دوم دیگـری کـه دارای ایـن سـاختار هسـتند، مـی تواننـد بـرای روش مـا بکـار بـرده شوند. با این حال، زمانی که محـدودیت نـوع ۲ اسـتفاده مـی شـود، نرمـال سـازی ضـروری اسـت. توضـیحات بـالا آسـان بـه نظر می رسد، اما اجرای آن پیچیـده تـر اسـت بـا توجـه بـه ایـن واقعیـت کـه بایـد مراقـب بـود کـه اطمینـان حاصـل شـود که ماتریس ها معکوس پذیر (برگشت پذیر) باشند.

**منابع**

H .M. . Markowitz, Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Paper title, *Basil Blackwell*, *Oxford,* (year) 1989.

W. F. Sharpe, Investments, 3rd edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (year)1985.