اولین کنفرانس جبر محاسباتی، نظریه محاسباتی اعداد و کاربردها
ایران، دانشگاه کاشان، ۲۸-۲۶ آذر ۱۳۹۳ (۱۹-۱۷ دسامبر ۲۰۱۴)، صفحات ۱ تا ۵.

سخنرانی

# درباره سرشت‌های دقیق

**سیده رقیه ادهمی**
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
r.adhami@modares.ac.ir

علی ایرانمنش
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
iranmanesh@modares.ac.ir

**چکیده**

مسئله رده‌بندی تمام زوج‌های دقیق $(G,\chi)$ از نوع $L$ ،برای مجموعه مفروض $L$ از اعداد صحیح جبری، توسط محققین بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته‌است. این مسئله در حالتی که $L$ شامل یک عدد غیرگویا است، حل شده‌است؛ اما نتایج برای حالتی که $L$ تنها شامل اعداد گویاست، بسیار محدود است. برخی از این حالت‌ها عبارت‌اند از: $L=\{l\}$، که در آن $l$ یک عدد گویاست؛ $L=\{-1,1\}$؛ $L=\{-1,2\}$؛ $L=\{-2,1\}$؛ $L=\{l,l+p\}$، که در آن $l=-1$ یا $l=p-1$ و $p$ عددی اول و فرد است.
در این مقاله حالت‌های $L=\{-1,3\}$ و $L=\{-3,1\}$ را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

**واژه های کلیدی:** سرشت دقیق، گروه متناهی، زوج دقیق.

**رده بندی موضوعی انجمن ریاضی امریکا (۲۰۱۰):** $20C15$.

## ۱ مقدمه

فرض کنید $G$ یک گروه متناهی است و $\chi$ سرشتی باوفا از $G$. تعریف می کنیم:

$$L(\chi):=\{\chi(g)\,|\,1\neq g\in G\}$$

و $Sh(\chi)=\prod_{l\in L(\chi)}(\chi(1)-l)$. ثابت شده‌است که $|G|$، $Sh(\chi)$ را می‌شمارد [۲]. زوج $(G,\chi)$ (یا به اختصار سرشت $\chi$ ) را دقیق از نوع $L$ نامیده می‌شود، هرگاه $L=L(\chi)$ و $Sh(\chi)=|G|$.
پس از ارائه این تعریف، مسئله رده‌بندی همه زوج‌های دقیق $(G,\chi)$ از نوع $L$، به ازای مجموعه مفروض $L$ از اعداد صحیح جبری مطرح شد [۲].
اگر سرشت اصلی $1_G$ از $G$ جزء اصلی $\chi$ با درجه تکرار $m$ باشد و قرار دهیم: $\chi'=\chi-m1_G$ و $L'=\{l-m|l\in L\}$، در این صورت، $(G,\chi)$ دقیق از نوع $L$ است اگر و تنها اگر $(G,\chi')$ دقیق از نوع $L'$ باشد. $(G,\chi)$ نرمال‌شده نامیده می‌شود، هرگاه $(\chi,1_G)_G=0$. در مطالعه زوج‌های دقیق فرض می‌کنیم $(G,\chi)$ نرمال‌شده است.

مسئله رده‌بندی تمام زوج‌های دقیق $(G,\chi)$ از نوع $L$ در حالتی که $L$ شامل عددی غیرگویاست، در قضیه زیر حل شده است:

**قضیه ۱.۱.** (قضیه ۱.۳ در [۱]) فرض کنید $(G,\chi)$ دقیق و نرمال‌شده است و $\chi$ مقداری غیرگویا اختیار می‌کند؛ در این صورت داریم:

۱. $G$ گروهی دوری از مرتبه $m$ است که $m\geq 3$ و $\chi$ خطی است، یا $m\geq 5$ و $\chi$ مجموع دو سرشت خطی مزدوج مختلط از $G$ است؛

۲. $G$ گروهی دو وجهی از مرتبه $2m$ است که $m\geq 5$ فرد است و $\chi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از درجه ۲؛

۳. $G$ گروه چهارگانی تعمیم یافته از مرتبه $2m$ است که $m\geq 8$ زوج است و $\chi=\psi$ یا $\chi=\psi+\varepsilon$، که در آن $\psi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از درجه ۲ و $\varepsilon$ سرشتی خطی با هسته دوری از مرتبه $m$؛

۴. $G$ گروهی یکریخت با گروه هشت وجهی باینری است و $\chi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از درجه ۲؛

۵. $G$ گروهی یکریخت با $SL(2,5)$ است و $\chi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از درجه ۲؛

۶. $G$ گروهی یکریخت با $A_6$ و $\chi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از درجه ۳.

از طرفی نتایج برای حالت‌هایی که $L$ تنها شامل اعداد گویاست، اندک‌اند (برای نمونه ر. ک. [۲]، [۳]، [۴]).
ساده‌ترین حالت در این بین، حالت $L=\{l\}$ است که در آن $l$ عددی گویاست. اگر $(G,\chi)$ دقیق از نوع $\{l\}$ باشد، به‌سادگی می‌توان دید $l=-1$ و $\chi=\rho_G-1_G$، که در آن $\rho_G$ سرشت منظم $G$ است.
اگر $(G,\chi)$ نرمال‌شده و دقیق از نوع $L=\{l_1,l_2\}$ باشد، که در آن $l_1$ و $l_2$ اعداد گویای متمایز هستند، از $\rho_G=(\chi-l_1 1_G)(\chi-l_2 1_G)$ نتیجه می‌شود که $(\chi,\chi)_G=1-l_1l_2$ و $l_1<0\leq l_2$. این ایجاب می‌کند که $(\chi,\chi)_G=1$ اگر و تنها اگر $(G,\chi)$ از نوع $\{l,0\}$ باشد، که $l<0$؛ $(\chi,\chi)_G=2$ اگر و تنها اگر $(G,\chi)$ از نوع $\{-1,1\}$ باشد؛ و $(\chi,\chi)_G=3$ اگر و تنها اگر $(G,\chi)$ از نوع $\{-1,2\}$ یا $\{-2,1\}$ باشد. برای حالت اول، برخی از ویژگی‌های $G$ و $\chi$ در [۲] و [۶] آمده‌است:

**قضیه ۲.۱.** (قضیه ۲.۲ در [۲]) فرض کنید $\chi$ سرشتی باوفا از گروه متناهی $G$ است. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $(G,\chi)$، دقیق از نوع $\{۰,l\}$ است؛

۲. $G$ زیرگروهی نرمال و آبلی‌مقدماتی مانند $N$ دارد، به طوری‌که $N-\{۱\}$ یک کلاس تزویج تنها است و به ازای هر $g\in G-N$ و هر $x\in N$، $g$ با $gx$ مزدوج است؛

۳. $\chi$ سرشتی تحویل‌ناپذیر است و روی همه کلاس‌های تزویج بجز یکی صفر می‌شود.

**قضیه ۳.۱.** (قضیه ۲ در [۶]) فرض کنید $G$ سرشتی نرمال‌شده و دقیق مانند $\chi$ از نوع $\{۰,l\}$ دارد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر $\tau$ یک سرشت دقیق نابدیهی و نرمال‌شده از $G$ باشد، آنگاه $L(\tau)=\{m,m-l\}$ که در آن $m<۰$ و $m$، $l$ را عاد می‌کند.

۲. تعداد سرشت‌های دقیق و نرمال‌شده از نوع $\{m,m-l\}$ از $G$ برابر است با تعداد زیرگروه‌های نرمال با اندیس $l/m$ در $G$.

زوج‌های دقیق از نوع $\{۱,-۱\}$ نیز در [۳] داده شده‌اند:

**قضیه ۴.۱.** فرض کنید $G$ گروهی متناهی و $\chi$ سرشتی از $G$ با درجه $n$ است. همچنین فرض کنید $(G,\chi)$ نرمال‌شده و دقیق از نوع $\{۱,-۱\}$ است. در این صورت، $G$ با یکی از ۱۲ گروه زیر یکریخت است:
$D_۸$ و $Q_۸$ $(n=۳)$؛ $S_۴$ و $SL(۲,۳)$ $(n=۵)$؛
$GL(۲,۳)$ و گروه هشت وجهی باینری $(n=۷)$؛
$S_۵$ و $SL(۲,۵)$ $(n=۱۱)$؛ $PSL(۲,۷)$ $(n=۱۳)$؛ $A_۶$ $(n=۱۹)$؛
پوشش دوم $\hat{A_۷}$ از $A_۷$ $(n=۷۱)$؛ $M_{۱۱}$ $(n=۸۹)$.

حالت آخر هم برای گروه‌های دارای مرکز نابدیهی در [۴] آمده‌است که در [۵] اصلاح شد و به حالت $L(\chi)=\{l,l+p\}$، به ازای $l=-۱$ یا $l=۱-p$ و عدد اول فرد $p$، به صورت زیر تعمیم داده شد:

**قضیه ۵.۱.** فرض کنید $(G,\chi)$ یک زوج نرمال‌شده و دقیق از نوع $\{-۱,p-۱\}$ باشد، که در آن $p$ عددی اول و فرد است. به‌علاوه، اگر مرکز گروه $G$ یعنی، $Z=Z(G)$ نابدیهی باشد، آنگاه $Z$ گروهی دوری از مرتبه $p$ است و یکی از موارد زیر برقرار است:
$G=Z\times D(۲p)$؛ $G=Z\times PSL(۲,q)$ با $q=p+۱$ یا $q=۲p+۱$؛
$G=Z\times Sz(q)$ با $q=p+۱$؛ $|G|=p^۳(p-۱)$ و $G$ گروه خودریختی $ES(p^۳,p^۲)$ است.

**قضیه ۶.۱.** فرض کنید $(G,\chi)$ یک زوج نرمال‌شده و دقیق از نوع $\{۱,p۱\}$ باشد، که در آن $p$ عددی اول و فرد است. به‌علاوه، اگر مرکز گروه $G$ یعنی، $Z=Z(G)$ نابدیهی باشد، آنگاه $Z$ گروهی دوری از مرتبه $p$ است و یکی از موارد زیر برقرار است:
$G=Z\times PSL(۲,q)$ با $q=p-۱$ یا $q=۲p-۱$؛

$p=3$ و $G=Z\times D(6)$؛ $p=5$ و $G=Z\times PSL(3,4)$؛
$p=3$، $|G|=54$ و $G$ گروه خودریختی $ES(27,9)$ است؛ $p=3$، $|G|=108$ و $G/Z$ یک گروه فروبینیوس است؛
$p=3$ و $G$ پوشش سوم $M_{10}$ یا $M_{22}$ است.

در ادامه حالتهای $L(\chi)=\{-1,3\}$ و $L(\chi)=\{-3,1\}$ را درنظر میگیریم، با این فرض که مرکز گروه‌های مورد نظر نابدیهی هستند.

# ۲ نتایج اصلی

فرض کنید $G$ گروهی متناهی و $\chi$ سرشتی باوفا از $G$ است، به‌طوری که $(G,\chi)$ زوجی نرمال‌شده و دقیق از نوع $\{\varepsilon,-3\varepsilon\}$ باشد که در آن $\varepsilon=\pm 1$. $Z(G)$ نماد مرکز $G$ است و فرض بر این است که $Z(G)\neq 1$. قرار می‌دهیم $n:=\chi(1)$؛ و بنابر تعریف زوج‌های دقیق داریم $|G|=(n-\varepsilon)(n+3\varepsilon)$.
همچنین تعریف می‌کنیم:
$A_\varepsilon:=\{g\in G|\chi(g)=\varepsilon\}$ و $A_{(-3\varepsilon)}:=\{g\in G|\chi(g)=-3\varepsilon\}$ و قرار می‌دهیم $a_\varepsilon:=|A_\varepsilon|$ و $a_{(-3\varepsilon)}:=|A_{(-3\varepsilon)}|$.
ویژگی‌های زیر را برای زوج‌های مورد نظر به‌دست آورده‌ایم:

**گزاره ۱.۲.** فرض کنید $p$ و $q$ اعدادی اول و فرد باشند، به‌گونه‌ای که $p$، $n-\varepsilon$ را عاد می‌کند و $q$، $n+3\varepsilon$ را. در این صورت داریم:

۱. به‌ازای هر عنصر $g$ در $G$ از مرتبه $p$، $\chi(g)=\varepsilon$؛

۲. به‌ازای هر عنصر $g$ در $G$ از مرتبه $q$، $\chi(h)=-3\varepsilon$؛

۳. هیچ عضوی از مرتبه $pq$ در $G$ وجود ندارد.

**گزاره ۲.۲.** $g.c.d(n-\varepsilon,n+3\varepsilon)\neq 1$.

**لم ۳.۲.** $a_\varepsilon=\frac{3}{4}n^2+\frac{5\varepsilon}{4}n-3$ و $a_{(-3\varepsilon)}=\frac{1}{4}n^2+\frac{3\varepsilon}{4}n-1$.

**نتیجه ۴.۲.** اگر $\varepsilon=1$ آن‌گاه $n=4k+1$؛ و اگر $\varepsilon=-1$ آن‌گاه $n=4k+3$.

**قضیه ۵.۲.** عددی طبیعی مانند $k$ موجود است به‌طوری که $|G|=16k(k+1)$.

# مراجع

[1] D. Alvis and S. Nozawa, *Sharp characters with irrational values*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), no. 3, 567-591.

[2] P. J. Cameron and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra **115** (1988), no. 1, 125-143.

[3] P. J. Cameron, T. Kataoka, and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups of type* $\{-۱,۱\}$, J. Algebra **152** (1992), no. 1, 248-258.

[4] S. Nozawa and M. Uno, *On sharp characters of rank ۲ with rational values*, J. Algebra **286** (2005), no. 2, 325-340.

[5] T. Yoguchi, *On sharp characters of type* $\{l, l+p\}$, Kyushu J. Math. **65** (2011), no. 1, 179-195.

[6] T. Yoguchi, *On determining the sharp characters of fiite groups*, JP J. Algebra, Number Theory Appl. **11** (2008), no. 1, p. 85-98.