اولین کنفرانس جبر محاسباتی، نظریه محاسباتی اعداد و کاربردها
ایران، دانشگاه کاشان، ۲۸-۲۶ آذر ۱۳۹۳ (۱۹-۱۷ دسامبر ۲۰۱۴)، صفحات ۱۹ تا ۲۲.

پوستر

شاخص راندمان عملگرها

سمانه حسین زاده
دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
hosseinzadeh.samaneh@yahoo.com

علی ایرانمنش
دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
iranmanesh@modares.ac.ir

محمدعلی حسین زاده
دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
ma.hoseinzade@gmail.com

اسما حمزه
دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
hamze2006@yahoo.com

مصطفی توکلی
دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
m.tavakoli@ut.ac.ir

علی رضا اشرفی
دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
alir.ashrafi@gmail.com

چکیده

در این مقاله به بررسی شاخص راندمان برخی از عملگرهای مهم گرافی مانند حاصلضرب دکارتی، ترکیب و پیوند گراف ها می‌پردازیم.

واژه های کلیدی: شاخص راندمان، عملگرهای گرافی، گراف مولکولی.

رده بندی موضوعی انجمن ریاضی امریکا (۲۰۱۰): $05A20$، $05C12$، $05C35$، $05C75$.

۱ مقدمه

فرض کنید که G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. اگر u,v دو رأس از این گراف باشند، فاصله این دو رأس را که با نماد $d(u,v)$ نمایش می دهند، عبارت است از طول کوتاهترین مسیری که این دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنند. همچنین درجه رأس u، عبارت است از تعداد یال‌هایی که روی u قرار گرفته‌اند و آن را با نماد $d(u)$ نشان می‌دهند. در گراف G، نماد $\Delta(G)$ نشان دهنده بزرگترین درجه رئوس G است. برای مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در این مقاله، به خوانندگان منابع [۱، ۲، ۳] را توصیه می کنیم.

اگر u یک رأس از G باشد، مجموع فاصله رئوس G از u را با نماد w_v یا w_v^G نشان می دهیم، به عبارت دیگر داریم $w_v = \sum_{u\in V(G)} d_G(v,u)$. همچنین تعریف می کنیم $w(G) = min\{w_v : v \in V(G)\}$. از مهمترین و قدیمی ترین شاخص های توپولوژیک می توان به شاخص وینر اشاره کرد که این شاخص در سال ۱۹۴۷ توسط هارولد وینر معرفی شد. این شاخص بر اساس فاصله رئوس در گراف بصورت $W(G) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)} w_u$ تعریف شد و تاکنون بسیاری از خواص شیمیایی، فیزیکی و ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است. اکنون شاخص راندمان یک گراف [۲] را که نشان دهنده میزان پراکندگی رئوس براساس کمترین فواصل است را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho(G) = 2W(G)/nw(G),$$

که در بالا n نشان دهنده تعداد رئوس گراف G است.

فرض کنید G و H گراف‌هایی با مجموعه رئوس مجزا باشند. در این صورت پیوند $G+H$، را از روي دو گراف G و H، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V(G+H) &= V(G)\cup V(H), \\ E(G+H) &= E(G)\cup E(H)\cup\{xy : x\in V(G), y\in V(H)\}. \end{aligned}$$

گراف با مجموعه رئوس $V(G)\times V(H)$، به طوری که دو رأس (u_1,v_1) و (u_2,v_2) با هم مجاورند اگر و تنها اگر u_1 و u_2 مجاور باشد، یا $u_1 = u_2$ و v_1 با v_2 مجاور باشد، را ترکیب یا حاصل‌ضرب

لغت‌نامه‌ای G و H گوییم و با $G[H]$ نشان می‌دهیم. هم چنین گراف با مجموعه رئوس $V(G)\times V(H)$، به طوری که دو رأس $(u_۱,v_۱)$ و $(u_۲,v_۲)$ با هم مجاورند اگر و تنها اگر $v_۲ = v_۱$و $u_۱$ و $u_۲$ مجاور باشد، یا $u_۲ = u_۱$ و$v_۱$ با $v_۲$ مجاور باشد، را حاصل‌ضرب دکارتی G و H گوییم و با $G\times H$ نشان می‌دهیم.

در این مقاله به محاسبه شاخص راندمان برخی از اعمال گراف ها می پردازیم. در همین راستا، شاخص راندمان حاصلضرب دکارتی، ترکیب و پیوند گراف ها را بررسی می کنیم.

۲ نتایج اصلی

یکی از روش های ساختن یک گراف بزرگ، استفاده از یک عملگر بین دو گراف کوچکتر است. در این قسمت ما به محاسبه شاخص راندمان برخی از اعمال بین گراف ها می پردازیم تا با استفاده از آن به محاسبه این شاخص برای گراف های بزرگ بر حسب محاسبه شاخص راندمان گراف های کوچکتر بپردازیم. در ادامه به بیان برخی از این نتایج می پردازیم.

قضیه ۱. فرض کنید G و H گراف‌هایی با مجموعه رئوس مجزا باشند. آنگاه داریم:

$$w(G\square H) = |V(H)|w(G) + |V(G)|w(H).$$

در قضیه بعد، شاخص راندمان ترکیب دو گراف محاسبه شده است.

قضیه ۲. فرض کنید G و H دو گراف مجزا باشند. در اینصورت داریم:

$$w(G[H]) = |V(H)|w(G) + ۲(|V(H)| - ۱) - \Delta(H).$$

در قضیه زیر، شاخص راندمان پیوند دو گراف را بدست آورده ایم.

قضیه ۳. برای دو گراف مجزای G با n رأس و H با m رأس داریم:

$$w(G+H) = \frac{۳(n+m) - (\Delta(G) + \Delta(H) + ۴) - |n + \Delta(H) - (m + \Delta(G))|}{۲}$$

مراجع

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph Theory, Graduate texts in mathematics, 244, Springer, New York, 2008.

[2] F. Cataldo, O. Ori, S. Iglesias-Groth, Topological Lattice Descriptors of graphene. Sheets with Fullerene-like Nanostructures, Mol. Sim. 36 (5) (2010) 341-353.

[3] T. Došlić, M. Ghorbani, M.A. Hosseinzadeh, Eccentric connectivity polynomial of some graph operations, Util. Math. 84 (2011) 297-309.