2th International Conference on Industrial Management
19 & 20 April 2017
دومین کنفرانس بین المللی مدیریت صنعتی
(30 و 31 فروردین 1396)

تجزیه، تحلیل و مقایسه الگوریتم‌های مختلف منطق فازی در پشتیبانی موثر

حمیدرضا فلاح لاجیمی، سودا سهیلی فر، آیدا سهیلی فر
استادیار، دانشکده مدیریت دانشگاه مازندران؛ lajim1363@gmail.com
دانشجو، کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه مازندران؛ std_s.soheilifar@khu.ac.ir
دانشجو، کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه خوارزمی؛ std_a.sohrilifar@khu.ac.ir

چکیده

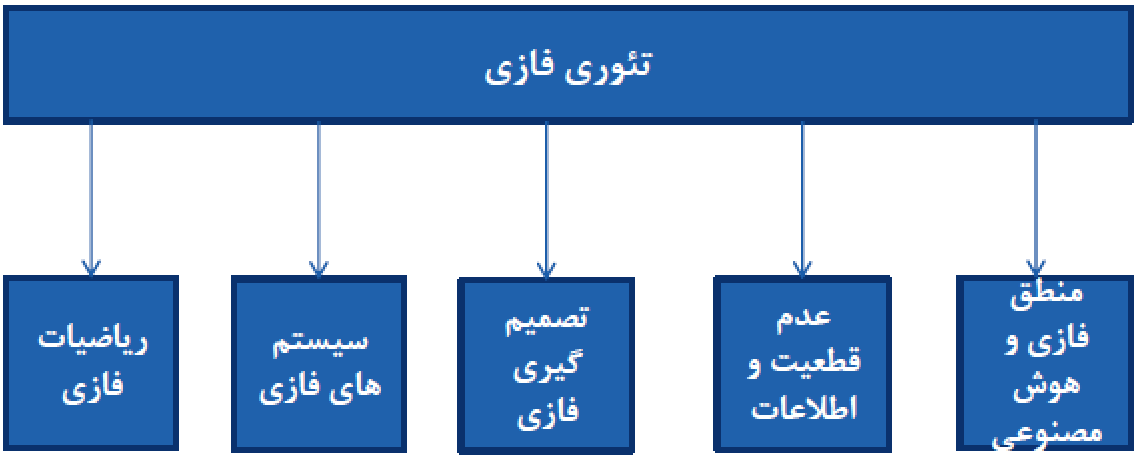
در سال‌های اخیر، منطق فازی مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. از منطق فازی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده‌ای که مدل سازی آن‌ها با استفاده از ریاضیات و روش‌های مدلسازی کلاسیک غیر ممکن و یا حداقل بسیار مشکل است را به راحتی و با انعطاف بیشتری می‌توان مدل‌سازی نمود. بیشترین دانش امروزی غیر قطعی بوده و از دقت کافی برخوردار نیست. در برخورد با چنین موقعیتی، رویکرد فازی مبتنی بر مجموعه فازی مناسب‌ترین راه به‌نظر می‌رسد. در طول سال‌های اخیر مطالعات فراوانی روی کاربرد منطق فازی انجام گرفته است. در این مقاله به‌طور مشخص سه روش ارائه شده در این راستا مورد تجزیه تحلیل قرار گرفته است. روش کومار مبتنی بر یک روش رتبه بندی فازی با هر دو محدودیت برابری و نابرابری، روش الهویرانلو روشی برای حل مساله FFLP مبتنی بر مقایسه اعداد فازی و روش پندیان مبتنی بر روش تجزیه برای حل مساله برنامه ریزی خطی عدد صحیح با متغیر های فازی، مقایسه و مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

واژگان کلیدی: زنجیره تأمین معکوس، برنامه ریزی خطی فازی کامل، منطق فازی، متغییرهای تصمیم‌گیری فازی

1-مقدمه

سیستم‌های فازی امروزه در طیف وسیعی از علوم و فنون، کاربرد پیدا کرده‌اند(Baykaso& Subulan, 2015). تئوری‌های فازی به پنج شاخه عمده تقسیم می‌شود که در شکل (1) این تقسیم‌بندی نمایش داده شده است. این پنج گروه نمایش داده شده مستقل از یکدیگر نبوده و به شدت با هم ارتباط دارد. برای نمونه، در تصمیم‌گیری فازی مسائل بهینه‌سازی را با محدودیت‌های ملایم در نظر می‌گیرد. منطق فازی نوعی از منطق بی‌نهایت مقدار تشکیل شده است و در واقع ابتکاری برای بیان رفتار مطلوب سیستم‌ها است (Kaur et all,2013). مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی توسط تانکا و همکارانش (Tanaka & Asai, 1984) و مساله برنامه‌ریزی خطی فازی و مجموعه‌های فازی، برای اولین بار توسط بلمن و لطفی‌زاده مطرح و معرفی شد(Zadeh,1965). ایده پرفسور لطفی‌زاده با این مضمون که " اساسا به نوع جدیدی ریاضیات نیاز است، ریاضیات مبهم یا فازی که توسط توزیع‌های احتمالات قابل توصیف نیستند" که ایشان ایده‌اش را در مقاله‌های مجموعه‌های فازی تجسم بخشید. بسیاری از مفاهیم بنیادی تئوری فازی در سال 1965، مفاهیم الگوریتمی در سال 1968، تصمیم‌گیری‌های فازی در سال 1970 و ترتیب فازی را در سال 1971، توسط پرفسور لطفی‌زاده در مقاله‌های مختلف منتشر شده است(Zadeh, 1976) . پس از وی، افراد دیگری در سایر حوزه‌های علمی به بحث و بررسی این مسائل پرداخته‌اند(Beaula& Singh &Kumar, 2012; Rajalakshmi, 2012). با به کارگیری تئوری‌های فازی، مدیریت کلاسیک نیز متحول شده است. یکی از عمده‌ترین

کاربردهای منطق فازی، بهینه‌سازی و بهبود تصمیم‌گیری است. برنامه‌ریزی ریاضی فازی، تصمیم‌گیری آماری فازی و تصمیم‌گیری چند معیاره فازی در این دسته قرار می‌گیرند(کیخسروی، 1393)



شکل (1) طبقه‌بندی کلی تئوری فازی

از منطق فازی برای اندازه‌گیری مفاهیم مبهم استفاده می‌شود و می‌توان روش‌های استدلال مغز بشر را جایگزین منطق کلاسیک کرد. منطق فازی فراتر از ارزش‌های صفر و یک در منطق کلاسیک رفته و درگاهی جدید برای علوم نرم‌افزاری و رایانه‌ها می‌گشاید، زیرا فضای ناواضح، شناور و بی‌نهایت صفر و یک را هم به‌کار می‌گیرد (کیخسروی، 1393).

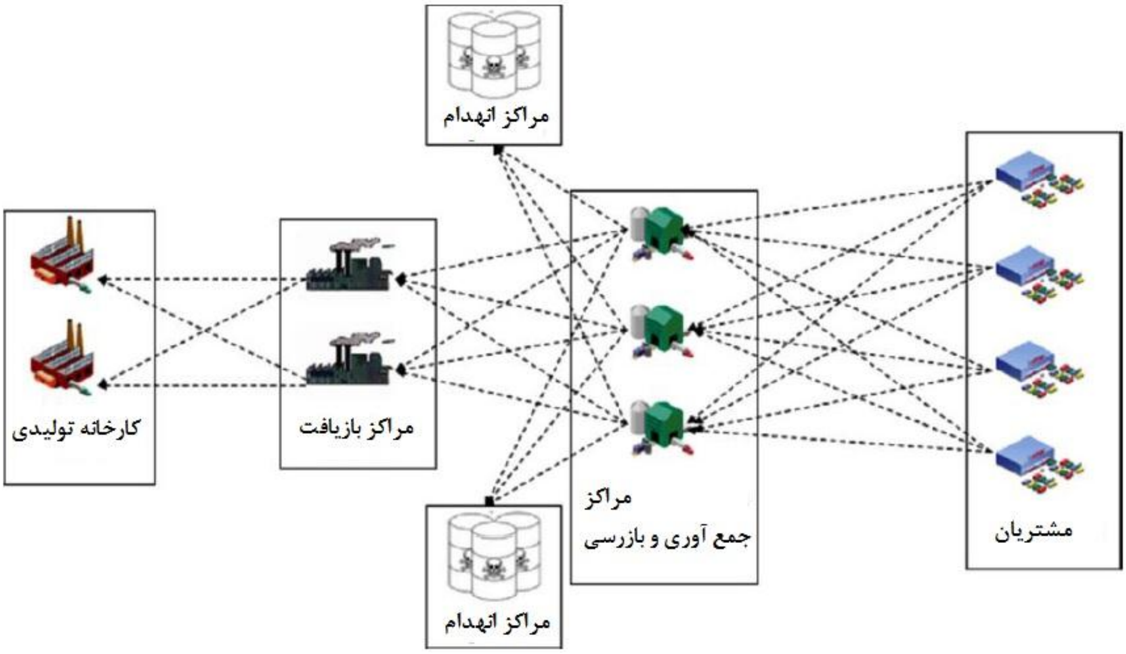
در بخش دوم این مقاله، اصول و مفاهیم برنامه‌ریزی خطی فازی کامل (FFLP) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم روش پندیان و همکاران وی، با حل یک مساله نمونه مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت. در بخش چهارم روش کومار و همکاران ایشان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش پنجم اشاره‌ای مختصر و مفید به روش اله-ویرانلو خواهد شد. در بخش ششم ویژگی‌های سه روش مورد مطالعه در این مقاله در طراحی شبکه زنجیره تأمین معکوس، با یک‌دیگر مقایسه خواهد شد و در نهایت، نتیجه‌گیری این سه روش نسبتا پرکاربرد در برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح با متغیر های فازی ارائه می‌شود.

2-زنجیره تأمین معکوس

یک زنجیره تامین به جریان مواد، اطلاعات، وجوه و خدمات از تامین کنندگان موادخام طی کارگاه‌ها و انبارها تا مشتریان پایانی اشاره دارد. شامل سازمان‌ها و فرایندهایی می شود که کالاها، اطلاعات و خدمات را ایجاد و به مصرف کنندگان تحویل می‌دهند. این زنجیره شامل بسیاری از وظایف از قبیل خرید، جریان وجوه، باربری مواد، برنامه‌ریزی و کنترل تولید، کنترل موجودی و لجستیکی و توزیع و تحویل می‌شود. جریان کالا نیز می‌تواند در جهت عکس اتفاق بیفتد مثل جریان کالاهای برگشتی. از جمله مباحثی که امروزه در حوزه زنجیره تأمین مورد بحث واقع می‌شود،

زنجیره تأمین معکوس است. زنجیره تأمین معکوس، تعمیر و تعویض، نوسازی محصول، ساخت مجدد، بازیافت، فروش مجدد و استفاده مجدد از آن‌ها تعریف می‌شود. (احتشام راثی، طلوعی، ناظمی و هکاران،1393)

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، جریان معکوس از مراکز جمع‌آوری محصولات استفاده شده از ناحیه‌های مختلف مشتری آغاز می‌شود. پس از بازرسی در مراکز جمع‌آوری، محصولات به دو دسته محصولات قابل بازیافت و محصولات زاید تقسیم می‌شوند. مواد قابل بازیافت به مراکز بازیافت انتقال داده می‌شوند و به صورت مواد خام بازیافت می‌شوند سپس به کارخانه تولیدی حمل می‌شوند که درشکل (2) نمایش داده شده است.



شکل 2 زنجیره تأمین معکوس

2-1- اهداف زنجیره تأمین معکوس

از مهم‌ترین اهدافی که برای زنجیره تامین معکوس بیان می‌شود می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- به دست آوردن کالاها و محصولات کارکرده مشتری توسط واسطه‌ها یا تولید کننده
- بازگشت کالاها به کارخانه برای بازرسی و طبقه‌بندی و عرضه‌ی مجدد برای استفاده در بخشی از زنجیره تأمین
- برگشت به کارخانه برای برگرداندن تنظیمات و ویژگی‌های آن به حالت اولیه و گارانتی و تعمیرات لازم برای عرضه ی مجدد آن به مشتری

3-برنامه ریزی خطی فازی کامل(FFLP)

برنامه‌ریزی خطی یک ابزار قدرتمند برای فرموله‌سازی طیف گسترده‌ای از مسائل است. شهرت برنامه‌ریزی خطی اساساً به واسطه‌ی دو دلیل است. نخست این‌که، بسیاری از مسائل عملی قادر هستند تا به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی فرموله شوند و دیگر این‌که، روش‌های موثری وجود دارد تا به حل مسائل برنامه‌ریزی خطی بپردازند.

برنامه‌ریزی خطی یا بهینه‌سازی خطی روشی جهت پیدا کردن مقدار کیمنه با بیشینه از یک تابع خطی است. در برنامه‌ریزی خطی فازی کامل تمام پارامترها و متغییرهای تصمیم‌گیری فازی هستند. جواب بهینه فازی محدوده انعطاف پذیری را برای تصمیم گیرنده در محیط‌های نامطمئن فراهم می‌کند. مفهوم برنامه‌ریزی خطی ریاضی با متغییرهای تصمیم فازی را نخستین بار تانکا مطرح کرد (تانکا،1974). برنامه‌ریزی خطی فازی با متغییرهای تصمیم فازی با روش‌های مختلفی حل می‌شوند. در ادامه سه روش پندیان و همکاران (pandian, 2010)، کومار و همکاران (kumar, 2010) و الهویرانلو (Allahviranloo, 2008) برای حل مسائل FFLP مورد بررسی قرار گرفته و ویژگی‌های سه روش با همدیگر مقایسه خواهد شد.

4- روش پندیان

برای بررسی این روش برخی از تعاریف ابتدایی، از اعداد فازی مثلثی مبتنی بر اصول فازی در ذیل آورده شده است:

تعریف 1: a یک عدد فازی که اعداد فازی مثلثی آن a_1, a_2, a_3 است که تابع عضویت آن به صورت زیر نمایش داده شده است.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} (x - a_1)/(a_2 - a_1), a_1 \le x \le a_2 \\ (a_3 - x)/(a_3 - a_2), a_2 \le x \le a_3 \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

تعریف 2: اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) دو عدد فازی مثلثی باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) \\ &\quad = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &(a_1, a_2, a_3) \ominus (b_1, b_2, b_3) \\ &\quad = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \\ &k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3), k \ge 0 \\ &k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3), k < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف 3: اگر در تابع F(R)، $A = (a_1, a_2, a_3)$ و $B = (b_1, b_2, b_3)$ باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} &\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ , } i = 1 \text{ to } 3 \\ &\tilde{A} \le \tilde{B} \Leftrightarrow a_i \le b_i \text{ , } i = 1 \text{ to } 3 \end{aligned} \quad (3)$$

تعریف 4: اگر در تابع F(R)، $A = (a_1, a_2, a_3)$ باشد بنابراین:

i $\tilde{A}$ مثبت است اگر $i = 1$تا$3, a_i \ge 0$.

ii $\tilde{A}$ عدد صحیح است اگر $a_i \ge 0$, $\forall_i = 1$تا3.

iii $\tilde{A}$ برابر است اگر $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.

تعریف 5: اگر هر یک از عناصر b یک عدد فازی واقعی نامنفی باشد، $\tilde{b} = (\tilde{b_i})$ یک بردار فازی واقعی نامنفی و $b \geq 0$ است.

با در نظر گرفتن $m \times n$ سیستم فازی خطی با اعداد فازی مثلثی نامنفی:

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b} \qquad (4)$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس نامنفی است. $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)$ بردارهای فازی نامنفی هستند و $(\tilde{x}_j, \tilde{b}_i) \in F(R)$, $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq i \leq m$.

تعریف 6: یک بردار فازی نامنفی $\tilde{x}$ یک جواب فازی خطی سیستم 1 را ارائه می کند اگر $\tilde{x}$ معادله (4) را بهینه کند.

تئوری 1: اگر $A\tilde{x} \leq \tilde{b}$ یک سیستم خطی فازی $m \times n$ باشد که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس نامنفی، $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)$ بردارهای فازی مثلثی نامنفی و $\tilde{X_j} = \left(x_1^j, x_2^j, x_3^j\right), \tilde{b_i} = \left(b_1^i, b_2^i, b_3^i\right) \in F(R)$ و $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq i \leq m$ باشند و $x^{\circ}_2 = (x_2^{j\circ})_{n\times 1}$ یک جواب از سیستم $Ax_2 \leq b_2\ , x_2 \geq 0$ باشد. به طوری‌که $x_2 = (x_2^j)_{n\times 1}$ و $b_2 = (b_2^i)_{m\times 1}$ است.

و $x_1^{\circ} = (x_1^{j\circ})_{n\times 1}$ یک جواب دیگر از سیستم $Ax_1 \leq b_1\ , x_1 \geq 0\ , x_1 - x_2^{\circ} \leq 0$ باشد به طوری که $x_1 = (x_1^j)_{n\times 1}$ و $b_1 = (b_1^i)_{m\times 1}$.

و $x_3^{\circ} = (x_3^{j\circ})_{n\times 1}$ جواب سیستم $Ax_3 \leq b_3\ , x_3 - x_2^{\circ} \geq 0$ باشد به‌طوری‌که $x_3 = (x_3^j)_{m\times 1}$ و $b_3 = (b_3^i)_{m\times 1}$ است. در نتیجه $\tilde{x}^{\circ} = (\tilde{x}_j^{\circ})$ یک راه حل از سیستم $A\tilde{x} \leq \tilde{b}$ است که $\tilde{x}_j^{\circ} = (x_1^{j\circ}, x_2^{j\circ}, x_3^{j\circ})$.

توجه 1: اگر $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3), \tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$ متناسب باشند، x_3° را می‌توان از رابطه $x_3^{\circ} = x_2^{\circ} + (x_2^{\circ} - x_1^{\circ})$ بدون نیاز به حل سیستم پایانی $Ax_3 = b_3\ , x_3 - x_2^{\circ} \geq 0$ محاسبه کرد. با در نظر گرفتن برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح با متغییر های فازی:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{maximize} \quad \tilde{z} = c\tilde{x} \\ & \text{subject to} \quad A\tilde{x} \leq \tilde{b} \\ & \qquad \tilde{x} \geq 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

ضریب ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس کریسپ نامنفی باشد، بردار هزینه $c = (c_1, \dots c_n)$ یک بردار کریسپ نامنفی و $\tilde{x} = (\tilde{x_j})_{n\times 1}$ و $\tilde{b} = (\tilde{b})_{m\times 1}$ بردارهای نامنفی فازی واقعی هستند که $\tilde{x_j}, \tilde{b_j} \in F(R)$ و $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq j \leq m$.

تعریف 7: اگر معادله (2) و (3) برقرار باشد، بردار فازی $\tilde{x}$ یک راه حل شدنی از مساله (P) است .

تعریف 8: یک راه حل شدنی $\tilde{x}$ از مساله (P) می‌تواند یک راه حل بهینه مساله (P) باشد اگر جواب شدنی نباشد $\tilde{u} = (\tilde{u}_j)_{n\times 1}$ به شرط $c\tilde{u} > c\tilde{x}$

با استفاده از نظریه 1 و عملیات محاسباتی اعداد فازی به نتایج زیر می‌توان رسید.

نظریه 2: اگر x_2°، x_1° و x_3° جواب‌های بهینه به ترتیب از مساله‌های خطی عدد صحیح (p_2)، (p_1) و (p_3)

باشد، بردار فازی $\tilde{x}^{\circ} = (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ})$ جواب بهینه مساله (p) است.

$$(P_2)\quad \text{Maximize}\quad z_2 = cx_2 \qquad (6)$$
$$\text{Subject to}\quad Ax_2 \le b_2\,, x_2 \ge 0$$

$$(P_1)\quad \text{Maximize}\quad z_1 = cx_1$$
$$\text{Subject to}\quad Ax_1 \le b_1\,, x_1 \ge 0, x_1 \le x_2^{\circ}$$

$$(P_3)\quad \text{Maximize}\quad z_3 = cx_3$$
$$\text{Subject to}\quad Ax_3 \le b_3\,, x_3 \ge\ge 0, x_3 \ge x_2^{\circ}$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\tilde{x}^{\circ} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ یک جواب بهینه از مساله (P) است.

اگر $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$ یک جواب شدنی از مساله (P) باشد.

در نتیجه:

$$c_1x_1 \le c_1x_1^{\circ}\,;\ c_2x_2 \le c_2x_2^{\circ}\,;\ c_3x_3 \le c_3x_3^{\circ}; \qquad (7)$$
$$Ax_1^{\circ} \le b_1\,;\ Ax_2^{\circ} \le b_2\,;\ Ax_3^{\circ} \le b_3\,,\ x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ} \ge 0$$

اگر $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3)$ تابع هدف از مساله (P) باشد ازمعادله (7) خواهیم داشت:

$$\text{Max.}\, z_1 = c_1x_1^{\circ}\,; \text{Max.}\, z_2 = c_2x_2^{\circ}\,; \text{Max.}\, z_3 = c_3x_3^{\circ} \qquad (8)$$

با توجه به معادلات (7) و (8) می‌توان نتیجه گرفت که x_1°, x_2° و x_3° جواب‌های بهینه از مساله‌های برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح (p_2)،(p_1) و (p_3) است.

با فرض این که x_2°، x_1° و x_3° جواب‌های بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح (p_2)،(p_1) و(p_3) است و مقادیر بیهنه به ترتیب Z_2°، Z_1° و Z_3° است. پس می‌توان نتیجه گرفت $\tilde{x}^{\circ} = (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ})$ جواب‌های بهینه مساله (P) با مقادیر بهینه $\widetilde{Z^{\circ}} = (Z_1^{\circ}, Z_2^{\circ}, Z_3^{\circ})$ است.

در صورتی که مساله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح با متغییرهای فازی زیر داده شده باشد، می‌توان این مساله را با الگوریتم توضیح داده شده حل نمود.

$$(P)\quad \text{Maximize}\ \tilde{Z} = 4\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2$$
$$\text{Subject to}$$
$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \le (6, 16, 30)$$
$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \le (1, 17, 30)$$
$$\widetilde{x_1}\,, \widetilde{x_2} \ge 0$$

اگر $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3)$ ، $\widetilde{x_1} = (y_1, x_1, t_1)$ و $\widetilde{x_2} = (y_2, x_2, t_2)$ و همچنین $\widetilde{x_1}$ و$\widetilde{x_2}$ با هم متناسب باشند.

در مرحله اول مساله(P_2) را با محدودیت‌های دارای مقادیر حد وسط مطابق معادلات حل نموده، متغیرهای به دست آمده از معادلات محدودیت‌های مساله (P_1) خواهد بود.

$$(P_2)\quad \text{Maximize}\quad z_2 = 4x_1 + 3x_2$$
$$\text{Subject to}$$
$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \le 16;\ 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \le 17$$

$\tilde{x}_1 , \tilde{x_2} \geq 0$

با استفاده از الگوریتم ILP جواب مساله (p_2)، $z_2 = 39$, $x_1 = 6$ و $x_2 = 5$ است.

در مرحله دوم مساله (P_1) را با محدودیت های دارای مقادیر حد پایین و محدودیت های حاصل از مساله (P_2) طبق معادله حل نموده، متغیرهای به دست آمده از معادله محدودیت‌های مساله (P_3) خواهد بود.

$$(P_1)\quad \text{Maximize}\quad z_1$$
$$\text{Subject to}$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 6\,;\; 2y_1 + y_2 \leq 1\,;\; y_1 \leq 6, y_2 \leq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

با استفاده از الگوریتم ILP جواب مساله (P_1) $z_1 = 2$, $y_1 = 0.5$ و $y_2 = 0$ است.

در مرحله آخر مساله (P_3) را با محدودیت های دارای مقادیر حد بالا و محدودیت های حاصل از مساله (P_2) طبق معادله حل نموده.

$$(P_3)\quad \text{Maximize}\quad z_1$$
$$\text{Subject to}$$
$$t_1 + 2t_2 \leq 30\,;\; 2t_1 + t_2 \leq 30\,;\; t_1 \geq 6, t_2 \geq 5$$
$$t_1 , t_2 \geq 0$$

$\tilde{x_1} = (y_1, x_1, t_1)$ و $\tilde{x_2} = (y_2, x_2, t_2)$ متناسب هستند،

بنابراین جواب مساله (P_3)، $z_3 = 50$, $t_2 = 5$, $t_1 = 10$ است.

و $\tilde{x_1} = (y_1, x_1, t_1) = (6,5,10); \tilde{x_2} = (y_2, x_2, t_2) = (0,5,5)$ و $\tilde{z} = (2,39,50)$ ، جواب بهینه مساله برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی است.

5- روش کومار

تعریف1: $\tilde{A} = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی است اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \dfrac{(x-c)}{(b-c)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{در غیر صورت} \end{cases} \tag{9}$$

تعریف2: یک عدد فازی مثلثی (a, b, c)، در صورتی عدد فازی نامنفی است که $a \geq 0$ باشد.

تعریف: رتبه یک تابع مبتنی بر اعداد فازی مثلثی $\Re$ است:

$$\Re(\bar{A}) = \frac{a + 2b + c}{4} \tag{10}$$

در این بخش عملیات ریاضی بین دو اعداد فازی مثلثی مورد بحث واقع خواهد شد.
اگر دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a,b,c)$ ، $\tilde{B}=(e,f,g)$ را داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
&\text{i}\quad \tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a,b,c)+(e,f,g)=(a+e,b+f,c+g)\\
&\text{ii}\quad -\tilde{A}=-(a,b,c)=(-c,-b,-a)\\
&\text{iii}\quad \tilde{A}\ominus\tilde{B}=(a,b,c)\ominus(e,f,g)=(a-g,b-f,c-e)\\
&\text{iv}\quad \text{if } \tilde{A}=(a,b,c),\tilde{B}=(x,y,z)\Rightarrow \tilde{A}\otimes\tilde{B}\simeq\begin{cases}(ax,by,cz), & a\geq 0\\ (az,by,cz), & a<0, c\geq 0\\ (az,by,cx), & c>0\end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

مرحله اول: محدودیت‌های نامساوی را به مساوی تبدیل کنید. اگر علامت محدودیت به صورت کوچکتر مساوی باشد، منغییری تحت عنوان $\tilde{S}_i$ را به سمت راست محدودیت اضافه می‌شود و در صورتی که علامت محدودیت بزرگتر مساوی باشد، متغییری تحت عنوان $\tilde{S}_i$ به سمت چپ محدودیت اضافه می‌شود.

$$\leq \tilde{b}_i \quad\Rightarrow\quad \textstyle\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j\oplus\tilde{S}_i=\tilde{b}_i \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j\geq\tilde{b}_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j=\tilde{b}_i\oplus\tilde{S}_i$$

مرحله دوم: متغییرهای $\tilde{b}=[\tilde{b}_j]_{m\times 1}$ ، $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ ، $\tilde{X}=[\tilde{x}_j]_{1\times n}$ ، $\widetilde{C^T}=[\tilde{c}_j]_{1\times n}$ را در مساله FFLP زیر جایگزین کنید:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize (or Minimize) } \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j\right),\\
&\text{Subject to } \textstyle\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j=\tilde{b}_i \quad \forall i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{13}$$

مرحله سوم: اگر همه پارامترهای $\tilde{c}_j$، $\tilde{x}_j$، $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_i$ به ترتیب اعداد فازی مثلثی (p_j,q_j,r_j)، (x_j,y_j,z_j)، (a_{ij},b_{ij},c_{ij})و (b_i,g_i,h_i) باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize (or Minimize) } \textstyle\sum_{j=1}^{n}(p_j,q_j,r_j)\otimes(x_j,y_j,z_j),\\
&\text{Subject to } \textstyle\sum_{j=1}^{n}(a_{ij},b_{ij},c_{ij})\otimes(x_j,y_j,z_j)=(b_i,g_i,h_i) \quad \forall i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{14}$$

(x_j,y_j,z_j) اعداد فازی مثلثی نامنفی

مرحله چهارم: اگر در مساله FFLP $(a_{ij},b_{ij},c_{ij})\otimes(x_j,y_j,z_j)=(m_{ij},n_{ij},o_{ij})$ داشته باشیم، معادلات به دست آمده از مرحله سوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize (or Minimize) } \Re\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}(p_j,q_j,r_j)\otimes(x_j,y_j,z_j)\right),\\
&\text{Subject to } \textstyle\sum_{j=1}^{n}(m_{ij},n_{ij},o_{ij})=(b_i,g_i,h_i) \quad \forall i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{15}$$

(x_j,y_j,z_j) اعداد فازی مثلثی نامنفی

مرحله پنجم: با توجه به عملیات ریاضی مساله برنامه‌ریزی خطی فازی، معادلات به دست آمده در مرحله قبل به

صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\text{Maximize (or Minimize) } \Re\left(\sum_{j=1}^{n}(p_j,q_j,r_j)\otimes(x_j,y_j,z_j)\right), \quad (16)$$
$$\text{Subject to } \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = b_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} n_{ij} = g_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} o_{ij} = h_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$
$$y_j - x_j \geq 0. \quad z_j - y_j \geq 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

مرحله ششم: جواب بهینه x_j، y_j و z_j را با حل مساله CLP در مرحله قبل به دست آورید.

مرحله هفتم:جواب بهینه فازی را با قرار دادن مقادیر x_j، y_j و z_j در $\widetilde{x_j} = (x_j,y_j,z_j)$ به دست آورید.

مرحله هشتم: جواب نهایی بینه فازی را با قرار دادن $\widetilde{x_j}$ در $\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c_j}\otimes\widetilde{x_j}$ محاسبه کنید.

مشابه روش پندیان در اینجا نیز یک مساله با استفاده از روش کومار مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در صورتی که مساله مفروض FFLP به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{Maximize } \left((1,6,9)\otimes\widetilde{x_1}\oplus(2,3,8)\otimes\widetilde{x_2}\right),$$
$$\text{Subject to } (2,3,4)\otimes\widetilde{x_1}\oplus(1,2,3)\otimes\widetilde{x_2} = (6,16,30),$$
$$(-1,1,2)\otimes\widetilde{x_1}\oplus(1,3,4)\otimes\widetilde{x_2} = (1,17,30)$$

$\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}$ اعداد فازی مثلثی نامنفی

جواب: اگر $\widetilde{x_1} = (x_1,y_1,z_1)$ و $\widetilde{x_2} = (x_2,y_2,z_2)$ باشد، پس مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Maximize } \left((1,6,9)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(2,3,8)\otimes(x_2,y_2,z_2)\right),$$
$$\text{Subject to } (2,3,4)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(1,2,3)\otimes(x_2,y_2,z_2) = (6,16,30),$$
$$(-1,1,2)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(1,3,4)\otimes(x_2,y_2,z_2) = (1,17,30),$$

$(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)$ اعداد فازی مثلثی نامنفی

با توجه به مرحله چهارم، مساله FFLP به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Maximize } \Re\left(1x_1+2x_2, 6y_1+3y_2, 9z_1+8z_2\right),$$
$$\text{Subject to } (2x_1+x_2, 3y_1+2y_2, 4z_1+3z_2) = (6,16,30),$$
$$(-x_1+x_2, y_1+3y_2, 2z_1+4z_2) = (1,17,30),$$

$(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)$ اعداد فازی مثلثی نامنفی

با استفاده از مرحله پنجم مساله برنامه‌ریزی خطی فازی بالا به مساله CLP تبدیل می‌شود:

$$\text{Maximize } \left(\frac{1}{4}(x_1+2x_2+12y_1+6y_2+9z_1+8z_2)\right),$$
$$\textit{Subject to } 2x_1+x_2=6,$$
$$-x_1+x_2=1,$$
$$3y_1+2y_2=16,$$
$$y_1+3y_2=17,$$
$$4z_1+3z_2=30,$$
$$2z_1+4z_2=30,$$
$$y_1-x_1\geq 0,\quad z_1-y_1\geq 0,\qquad y_2-x_2\geq 0,\quad z_2-y_2\geq 0$$

جواب بهینه مساله CLP مطرح شده $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3, x_2 = 4, y_2 = 5, z_2 = 6$ خواهد شد.

با استفاده از مرحله هفتم جواب بهینه فازی به صورت $\widetilde{x_1} = (1,2,3), \widetilde{x_2} = (4,5,6)$ است.

6- روش الهویرانلو

یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ با مرکزیت A، پهنای چپ $\acute{A}$ و پهنای راست A'' با روابط عضویت زیر اعداد فازی مثلثی نامیده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{A-x}{\acute{A}} & A - A' \leq x \leq A \\ 1 - \dfrac{x-A}{A''} & A \leq x \leq A + A'' \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \tag{17}$$

تابع رتبه‌بندی شده مورد استفاده در این روش می‌تواند برای هر عدد فازی دلخواه با نمایش r توصیف شود.

$$\Re(\bar{A}) = {}^{1}/_{2} \int_0^1 \underline{(A(r))} + \int_0^1 \overline{A(r)} \tag{18}$$

برای یک عدد فازی مثلثی رتبه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\Re(\tilde{A}) = A + {}^{1}/_{4}\,(A'' - A') \tag{19}$$

بر اساس رتبه تابع، دو عدد فازی $\bar{B}$ و $\bar{A}$ را می‌توان مقایسه نمود. تنها در صورتی عدد فازی $\bar{A}$ بزرگ‌تر از $\bar{B}$ خواهد بود که رابطه زیر برقرار باشد:

$$A + {}^{1}/_{4}\,(A'' - A') \geq B + {}^{1}/_{4}\,(B'' - B') \tag{20}$$

در نتیجه مساله برنامه‌ریزی خطی فازی کامل به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Min or Max} \cong \sum_{j=1}^{n} (c_j - \frac{1}{4}c_j' + \frac{1}{4}c_j'')x_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{4}x_j' + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{4}x_j'' \tag{21}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j - \tfrac{1}{4}c_j' + \tfrac{1}{4}c_j'')x_j - \sum_{j=1}^{n}\tfrac{a_{ij}}{4}x_j' + \sum_{j=1}^{n}\tfrac{a_{ij}}{4}x_j''\{\leq,\ =,\ \geq\}b_i - \tfrac{1}{4}b_i' + \tfrac{1}{4}b_i'$$

$$x_j - \frac{1}{4}x_j' + \frac{1}{4}x_j'' \geq 0 \quad \forall_j \in n$$

$x_j \geq x_j^{\prime} \ \forall_j \in n$

7- مقایسه سه روش فوق در طراحی شبکه زنجیره تأمین معکوس

همان‌طور که بیان شد سه روش مطالعه شده در این مقاله در طراحی شبکه زنجیره تأمین معکوس استفاده می-شود. روش کومار روشی مبتنی بر تابع رتبه‌بندی شده برای مساله برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی با محدودیت‌های مساوی است. با کمک این روش می‌توان جواب بهینه مساله را به دست آورد. در صورتی که پندیان و همکاران روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند که نیازمند تابع رتبه‌بندی شده و متغییرهای فازی نامنفی کمکی نمی‌باشد. نتایج به دست آمده در روش پندیان و روش کومار مشابه هستند. روش کومار متغییر و محدودیت‌های بیشتری نسبت به دو روش نیاز دارد. روش پندیان نسبت به سایر روش ها برای تصمیم گیرنده پیچیده‌تر است زیرا نتایجی که برای یک مدل به دست آمده به عنوان محدودیت‌های یک مدل استفاده می‌شوند.

اما مشاهدات نشان می‌دهد جواب مساله برنامه‌ریزی خطی فازی کامل در (اندازه) بزرگ به روش کومار، نیازمند محاسبات بیشتری است. همان‌طور که گفته شد جواب هر سه روش به یکدیگر نزدیک هستند پس می‌توان از روش الهویرانلو استفاده کرد زیرا متغییر و محدودیت‌های کمتری نیاز دارد. روش اله ویرانلو جواب تقریبی ارائه می‌کند زیرا به چگونگی تقریب به نزدیک‌ترین عدد متقارن فازی مثلثی برای تمامی پارامترها و متغییرهای تصمیم غیرقطعی دارد.

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله مقدمه ای بر منطق فازی و مسئله برنامه‌ریزی خطی و زنجیره تأمین مورد بررسی قرار گرفت و تلاش شد سه روش جهت حل مسئله برنامه ریزی خطی فازی مورد بررسی قرار گرفت؛ روش کومار و همکاران، روش پندیان و همکاران و روش الهویرانلو. سپس به بررسی و مقایسه این سه روش در طراحی شبکه زنجیره تأمین معکوس پرداخته شد. جواب بهینه به دست آمده از سه روش مشابه یکدیگر است. تعداد محدودیت‌ها در روش کومار بیشتر از دو روش است پس نیاز به محاسبات بیشتری دارد.

منابع

طلوعی، عباس و احتشامی، رضا و ناظمی، جمشید و البرزی، محمود، طراحی مدل ریاضی برای بهینه سازی فرآیند برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی در زنجیره تامین معکوس، 1393

کیخسروی، علی. مروری بر منطق فازی و نظریه مجموعه‌های فازی. اولین کنفرانس ملی ریاضیات صنعتی تبریز، 1393.

A.Baykaso˘glu ,k,Subulan , An analysis of fully fuzzy linear pro-gramming with fuzzy decision variables through logistics network design problem, Knowledge-BasedSystems (2015).

A. Kumar, P. Singh, A new method for solving fully fuzzy linear programming problems, Ann. Fuzzy Math. Inform. 3 (2012) 103–118.

A. Kumar, J. Kaur, P. Singh, Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints, Int. J.Math. Comp. Sci. 6 (2010) 37–41.

.

H. Tanaka, K. Asai, Fuzzy solution in fuzzy linear programming problems, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-14 (1984) 325–328.

H.F. Wang, H.W. Hsu, Resolution of an uncertain closed-loop logistics model: An application to fuzzy linear programs with risk analysis, Journal of Environmental Management 91 (2010) 2148-2162.

J. Kaur, A. Kumar, Mehar's method for solving fully fuzzy linear programming problems with LR fuzzy parameters, Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 7142-7153

L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Inform. Contr., vol. 8, pp. 338–353, 1965.

L. A. Zadeh, "Probability measures of fuzzy events," J. Math. Anal. Appl.,vol. 23, pp. 421–427, 1968.

L. A. Zadeh, "A fuzzy-algorithmic approach to the definition of complex or imprecise concepts," Int. J. Man–Machine Studies, vol. 8, pp. 249–291, 1976.

M. Jayalakshmi, P. Pandian, A new method for finding an optimal fuzzy solutionfor fully fuzzy linear programming problems, Int. J. Eng. Res. Appl. 2 (2012) 247–254

T. Beaula, S. Rajalakshmi, Solving fully fuzzy linear programming problem using breaking points, Int. J. Appl. Oper. Res. 2 (2012) 11–20.

T. Allahviranloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, M.Kh. Kiasary, N.A. Kiani, L. Alizadeh, Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function, Appl. Math.Sci. 2 (2008) 19–32.