Archive of SID

2th International Conference on Industrial Management
19 & 20 April 2017
دومین کنفرانس بین المللی مدیریت صنعتی
(30 و 31 فروردین 1396)

بررسی عملکرد مدل‌های مارکویتز و GMD در انتخاب پرتفوی بهینه

کیخسرو یاکیده[1]، غلامرضا محفوظی[2]، ارمغان علی‌پور جورشری[3]

[1]استادیار، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه گیلان؛ yakideh@guilan.ac.ir
[2]استادیار، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه گیلان؛ gholamrezamahfoozi@yahoo.com
[3]کارشناسی ارشد، دانشکده مدیریت و اقتصاد،دانشگاه گیلان؛ armaghan.6788@gmail.com

چکیده

مساله اصلی هر سرمایه‌گذار در بورس اوراق بهادار، تعیین مجموعه سهم‌هایی است که مطلوبیت آن حداکثر باشد. هدف این پژوهش، ایجاد بهترین پرتفوی ممکن با کمترین ریسک و بیشترین بازده می‌باشد. برای انتخاب پرتفوی بهینه، مارکویتز مدل میانگین-واریانس و ییتژاکی مدل تفاوت میانگین جینی(GMD) را ارائه دادند. در مدل میانگین-واریانس، میانگین به عنوان معیاری از بازده و واریانس به عنوان معیاری از ریسک می‌باشد. در مدل GMD متوسط قدرمطلق بازده‌ها در زمان‌های متفاوت به عنوان ریسک در نظر گرفته می‌شود. در این پژوهش از دو مدل مارکویتز و GMD بهره گرفته شده و مبانی نظری این مدل‌ها تشریح گردیده است. عملکرد مدل‌ها با تشکیل پرتفوی بهینه و آزمون آن به صورت عملی در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار گرفت.

واژگان کلیدی

نظریه مارکویتز، مدل تفاوت میانگین جینی(GMD)، سبد سهام بهینه

1- مقدمه

انتخاب سبد سهام بهینه از ابتدا تا کنون حول محور مطلوبیت سرمایه‌گذاران می‌چرخد. وقتی که فرد سرمایه‌گذار با دارایی‌های متفاوت روبرو می‌گردد، بایستی که در مورد تعداد دارایی‌های انتخابی و میزان سرمایه‌گذاری در هر کدام از آنها، تصمیم‌گیری نماید که در این شرایط فرآیند تصمیم‌گیری بسیار دشوار می‌باشد. تلاش‌های فراوانی جهت بالا بردن مطلوبیت سرمایه‌گذاران در مساله انتخاب سبد سهام بهینه انجام گرفته است و در نهایت، هری مارکویتز در سال 1952 ریسک و بازده را دو عامل مهم در تعیین مطلوبیت سرمایه‌گذاران در نظر گرفت.

مساله بهینه‌سازی سبد سهام را می‌توان به صورت خطی و هم به صورت غیرخطی حل نمود. روش غیرخطی یا درجه دوم، همان روش اصلی مارکویتز می‌باشد که با حل آن می‌توان به سبد سهام بهینه دست یافت. درجه دوم بودن معیار ریسک در مدل مارکویتز زمانی که تعداد سهم‌ها زیاد باشد، محاسبات را دشوار می‌کند. ییتژاکی[1] در سال 1982 مدل (ریسک-میانگین) را با استفاده از تفاوت میانگین جینی[2] (GMD) به عنوان مقیاسی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرد. زمانی که داده‌ها نرمال نباشند، روش‌هایی مانند مدل تفاوت میانگین جینی می‌توانند موثرتر از

[1]. Yitzkaki
[2]. Gini's Mean Difference(GMD)

www.SID.ir

Archive of SID

روش‌هایی که بر پایه واریانس می‌باشند عمل کنند.

هدف این پژوهش ارزیابی مقایسه‌ای عملکرد مدل درجه دوم مارکویتز و مدل خطی تفاوت میانگین جینی جهت انتخاب سبد سهام بهینه می‌باشد. این پژوهش بر روی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی 3ساله از تاریخ 1390/1/1 تا 1392/12/29 انجام گرفته است. سبدهای سهام بهینه با بهره‌گیری از هر دو مدل تشکیل می‌شود.

2- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

مدل مارکویتز

مارکووتیز در سال 1950 مدل اساسی پرتفوی را ارائه کرد که مبنایی برای تئوری مدرن پرتفوی قرار گرفت. مهم‌ترین نقش تئوری مارکویتز ایجاد چهارچوب ریسک-بازده پرتفوی برای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران است. مارکویتز با تعریف کمی ریسک سرمایه‌گذاری، برای سرمایه‌گذاران در امر انتخاب دارایی‌ها و مدیریت پرتفوی، رویکرد ریاضی ارائه کرد (رودپشتی و همکاران،1394). تئوری پورتفوی با وقایع مربوط به آینده و وقایع مورد انتظار در آینده سر و کار دارد. از طرف دیگر اگر بخواهیم عملکرد پورتفوی را برای دوره‌های قبل ارزیابی کنیم از مقادیر واقعی ریسک و بازده که مربوط به وقایع گذشته است استفاده می‌کنیم (جونز،1386).

یکی از اصول مارکویتز، توجه به دو عامل ریسک پرتفوی و بازدهی پرتفوی به طور همزمان برای سرمایه‌گذار است. این در حالی است که قبل از مارکویتز، توجه به ریسک پرتفوی و بازدهی پرتفوی در ادبیات مالی به صورت تصادفی بود. مارکویتز چنین استدلال می‌کند که سرمایه‌گذاران تصمیمات سرمایه‌گذاری خود را بر اساس تقابل بین ریسک پرتفوی و بازدهی پرتفوی اتخاذ می‌کنند. وی واریانس بازدهی پرتفوی مورد انتظار را نیز معیاری برای محاسبه ریسک پرتفوی معرفی کرد. مارکویتز معتقد بود که یک سرمایه‌گذار منطقی بدنبال انتخاب پرتفویی است که دارای کمترین واریانس از میان کلیه پرتفوی‌های موجود در یک سطح خاص است (رودپشتی و همکاران،1394).

برای محاسبه بازده مورد انتظار اوراق بهادار، سرمایه‌گذار نیاز دارد تا بازده محتمل اوراق بهادار و احتمال وقوع هر یک از بازده‌های ممکن را برآورد کند. مجموع این احتمالات برابر 1 می‌باشد. با توجه به توزیع احتمالات بازده‌های بالقوه برای هر ورق بهادار (که با i نشان داده می‌شود) بازده مورد انتظار از رابطه (2-1) بدست می‌آید.

$$E(R) = \sum_{i=1}^{m} R_i Pr_i \qquad (1\text{-}2)$$

$E(R)$: بازده مورد انتظار اوراق بهادار، R_i : i امین بازده ممکن، Pr_i : احتمال i امین بازده ممکن، m : تعداد بازده‌های بالقوه برای هر یک از اوراق بهادار (جونز،1386).

بازده سبد سهام برابر متوسط موزون بازده تک‌تک سهم‌ها می‌باشد. وزن‌های ترکیب شده برابر با مجموع 100 درصد کل وجوه قابل سرمایه‌گذاری می‌باشد. بازده مورد انتظار سبد سهام طبق رابطه (2-2) محاسبه می‌شود.

www.SID.ir

Archive of SID

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} W_i E(R_i) \qquad (2\text{-}2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$$

$E(R_p)$:بازده مورد انتظار سبد سهام، W_i :وزن سبد سهام برای iامین ورق بهادار، $E(R_i)$: بازده مورد انتظار سهم i، قابل توجه است که علامت i دلالت بر یک سهم خاص و علامت p دلالت بر یک سبد سهام دارد.

در مدل مارکویتز ریسک هر سهم معادل واریانس یا ریشه دوم آن یعنی انحراف معیار در نظر گرفته می‌شود. محاسبه واریانس طبق رابطه (2-3) و محاسبه انحراف معیار به صورت رابطه (2-4) ارائه شده است.

$$VAR(R) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} (R_i - E(R))^2 Pr_i \qquad (3\text{-}2)$$

$$SD(R) = \sigma = \sqrt[2]{(\sum_{i=1}^{m} (R_i - E(R))^2 Pr_i} \qquad (4\text{-}2)$$

$VAR(R)$: واریانس بازده هر اوراق بهادار، $SD(R)$: انحراف معیار بازده

لازمه درک ریسک پرتفوی آشنایی با مفاهیم انحراف معیار پرتفوی، کواریانس و ضریب همبستگی می باشد. واریانس پرتفوی به صورت ارزش مورد انتظار مجذور انحرافات بازده پرتفوی از میانگین بازده مورد انتظار پرتفوی تعریف می‌شود.

$$\sigma_p{}^2 = E(R_p - \bar{R}_p)^2 \qquad (5\text{-}2)$$

$\sigma_p{}^2$: واریانس پرتفوی، انحراف معیار پرتفوی از مجذور واریانس پرتفوی بدست می آید.

کوواریانس مقیاسی از چگونگی حرکت بازدهی سهم‌ها با یکدیگر است و به صورت رابطه (2-6) بدست می‌آید که نشان‌گر کوواریانس یک پرتفوی دو سهمی است که قابل تعمیم به یک پرتفوی n سهمی می‌باشد.

$$Cov_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^{N} [(R_{At} - \bar{R}_A)(R_{Bt} - \bar{R}_B)]}{N-1} \qquad (6\text{-}2)$$

اندازه کوواریانس نشان‌دهنده رابطه بین بازده دو سهم می‌باشد. ریسک سبد سهام تابعی از ریسک هر یک از اوراق بهادار و کوواریانس بازده هر یک از اوراق بهادار می‌باشد. این مفهوم در عبارت واریانس رابطه (2-7) نشان داده شده است:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{m} W_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} W_i W_j \sigma_{ij} \qquad (7\text{-}2)$$

$\sigma_i{}^2$: واریانس بازده هر سهم، σ_{ij} : کوواریانس میان بازده‌های اوراق بهادار i و j ، W_i :درصد وجوه سرمایه‌گذاری که در اوراق بهادار i سرمایه‌گذاری شده است، $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}$: علامت جمع دوگانه که نشان می‌دهد اعداد n^2 باید به همدیگر اضافه شوند(یعنی کلیه زوج‌های ممکن مقادیر i و j).

واضح است که روابط میان بازده مورد انتظار اوراق بهادار، هسته اصلی تئوری سبد سهام را شکل می‌دهد (راعی و

www.SID.ir

Archive of SID

پویان‌فر، 1391). وجود عبارت کوواریانس بازده سهم‌ها در واریانس سبد، نشان‌دهنده این واقعیت است که بازده منفی یک سهم ممکن است با بازده مثبت سهمی دیگر، در شرایطی که بازده دو سهم کواریانس منفی داشته باشند جبران شود. مدل نهایی نظریه مارکویتز در مدل (2-8) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} &Min\ V_\Omega \\ &s.t. \quad E_\Omega \geq (1-\gamma)E_\Omega^b \\ &\sum_{i=1}^{m} W_i = 1 \\ &W_i \geq 0 \\ &V_\Omega = W^T \sum W = \sum_{k=1}^{n} W_k^2 \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1\ l\neq k}^{n} W_k w_l \Omega_{kl} \end{aligned} \qquad (8\text{-}2)$$

E_Ω^b : نشان‌دهنده ماکزیمم بازده سبدی است که قابل دست‌یابی می‌باشد، V_Ω : نشان‌دهنده ریسک سبد است که قرار بر مینیمم کردن آن است، W_k : وزن سبد سهام برای kامین ورق بهادار، σ_k^2 : واریانس بازده اوراق بهادار

مدل تفاوت میانگین جینی

ییتژاکی در سال 1982 مدل تفاوت میانگین جینی به عنوان مقیاسی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرد (ابزری و همکاران، 1384). در هنگام سنجیدن تغییرات، واریانس محبوب‌ترین روش است. زمانی که داده‌ها نرمال نباشند روش‌هایی مانند مدل تفاوت میانگین جینی می‌توانند موثرتر از روش‌هایی که بر پایه واریانس می‌باشند عمل کنند. در مدل تفاوت میانگین جینی در واقع تغییرات بازده سبدها در حالات مختلف سنجیده می‌شود. در این مدل بازده به عنوان متغیر گسسته در نظر گرفته شده و با نماد y_t نمایش داده می‌شود.

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t''=1}^{T} |y_{t'} - y_{t''}|\, p_{t'} p_{t''} \qquad (9\text{-}2)$$

$\Gamma(x)$: تابع ریسک، t : نشان دهنده زمان است، $y_{t'}$: بازده در زمان t' ، $y_{t''}$: بازده در زمان t''، $p_{t'}$: احتمال در زمان t' ، $p_{t''}$: احتمال در زمان t''، T : تعداد سناریوها(زمان‌ها)

کمینه کردن تابع $\Gamma(x)$ به صورت خطی اساس این مدل است. در رابطه (2-9) y_t از فرمول(2-10) و p_t از رابطه (2-11) بدست می‌آید.

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \qquad (10\text{-}2)$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t = 1 \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad (11\text{-}2)$$

x_j : وزن واحد jام، r_{jt} : بازده واحد j ام در زمان t

www.SID.ir

Archive of SID

همانطور که در فرمول (2-11) مشخص است احتمال وقوع هر حالت دارای توزیع یکنواخت گسسته است، یعنی $p_t = \frac{1}{T}$ می‌باشد. ریسک در مدل تفاوت میانگین جینی متوسط قدرمطلق بازده‌ها در زمان‌های متفاوت برای سبدها می‌باشد. مدل بهینه‌سازی سبد سهام بر اساس میانگین تفاوت جینی به صورت مدل (2-12) ارائه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&min \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t''\neq t'} p_{t'} p_{t''} d_{t't''} \\
&d_{t't''} \geq y_{t'} - y_{t''} && t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t' \\
&y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j && t = 1, \dots, T \\
&\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
&\mu \geq \mu_0 \\
&d_{t't''} \geq 0 && t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t' \\
&x \epsilon Q
\end{aligned}
\qquad (12\text{-}2)
$$

$d_{t't''}$: تفاوت بازده در زمان t' و t''، μ : بازده مورد انتظار، Q : مجموعه پرتفوی‌های ممکن(مانیسی و همکاران، 2015،21-30).

3-روش‌شناسی تحقیق

از حیث دسته‌بندی پژوهش‌ها بر حسب هدف این پژوهش یک پژوهش کاربردی است چرا که هدف پژوهش، افزایش دانش در موضوعی است که در عمل می‌تواند مورد استفاده مشخصی برای سرمایه‌گذاران در بازار سهام داشته باشد. ماهیت روش در اینجا در زمره روش‌های ریاضی است که به دنبال بررسی یک فرضیه و بیان ارتباط میان مفاهیم کیفی نیست بلکه بر هدف تحقیق یعنی ارائه روش حل یک مساله در چهارچوب منطق ریاضی تمرکز دارد. به این صورت که ابتدا مساله را در قالب مدل ریاضی تعریف کرده سپس مدل حل می‌شود. از بین همه شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران، 185 شرکت که سال مالی آن‌ها اسفند هر سال بوده به عنوان مثال تجربی این پژوهش انتخاب شده‌اند.

4-تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این پژوهش بازده سال‌های 1390 و 1391 از سایت رسمی شرکت مدیریت فناوری بورس تهران[3] استخراج گردید. برای حل مدل‌های مارکویتز و GMD از نرم‌افزار گمز[4] استفاده شده است. با حل مدل‌ها، میزان خرید هر سهم و سبد بهینه هر سال مطابق جدول‌های 1 و 2 تشکیل گردید.

[3] http://www.tsetmc.com
[4] GAMS

www.SID.ir

Archive of SID

جدول 1- سبد سهام با روش مارکویتز

سال	نام شرکت	وزن شرکت در سبد	بازده شرکت	بازده سبد
91	پارس پامچال	0/543	0/6123	0/3742
	پلاسکوکار سایپا	0/362	0/0014	
	فراورده تزریقی	0/032	1/1143	
	قند قزوین	0/063	0/0892	
92	پالایش نفت اصفهان	0/132	0/4442	1/1397
	پالایش نفت بندرعباس	0/333	1/5610	
	پتروشیمی فارابی	0/314	1/8129	
	دوده صنعتی پارس	0/149	-0/0608	
	نساجی بروجرد	0/073	0/0154	

جدول 2- سبد سهام با روش GMD

سال	نام شرکت	وزن شرکت در سبد	بازده شرکت	بازده سبد
91	پارس پامچال	0/554	0/6123	0/3398
	پلاسکوکار سایپا	0/446	0/0014	
92	پالایش نفت اصفهان	0/171	0/4442	1/3155
	پالایش نفت بندرعباس	0/296	1/5610	
	پتروشیمی فارابی	0/428	1/8129	
	نساجی بروجرد	0/105	0/0154	

5-نتیجه‌گیری

بازده محاسبه شده سبدهای تشکیل گردیده از مدل‌های مارکویتز و GMD نشانگر این است که سرمایه‌گذار با خرید سبدهای پیشنهادی می‌تواند به سود مطلوبی دست یابد. تشکیل سبد با بهره‌گیری از داده‌های یک سال انجام گرفته و بازده سبد پیشنهادی در سال بعد محاسبه شده است که بیانگر کاربردی بودن مدل‌های ارائه شده در این پژوهش می‌باشد.

6-مراجع

-ابزری، مهدی، کتابی، سعیده، عباسی، عباس (1384)، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی و ارائه یک مدل کاربردی ، مجله علوم اجتماعی و انسانی دانشگاه شیراز، شماره2: 1-17.

-جونز، چارلز پی، (1386)، مدیریت سرمایه‌گذاری (ترجمهٔ رضا تهرانی، عسگر نوربخش)،تهران: نگاه دانش.

-راعی، رضا، پویان فر، احمد، (1391)، مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته، تهران: انتشارات سمت.

-رهنمای‌رودپشتی، فریدون، نیکومرام، هاشم، طلوعی‌اشلقی، عباس، حسین‌زاده‌لطفی، فرهاد، بیات، مرضیه (1394)، بررسی کارایی بهینه‌سازی پرتفوی بر اساس مدل پایدار با بهینه‌سازی کلاسیک در پیش‌بینی ریسک و بازده پرتفوی ، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار(مدیریت پرتفوی)، شماره 22: 29-59.

- Mansini, Renata, Ogryczak, Wlodzimierz, Speranza, M.Grazia, 2015, Linear and Mixed Integer Programming for Potfolio Optimization, New York: AG Switzerland, p.21-30.

www.SID.ir

Archive of SID

www.SID.ir

Archive of SID

Performance evaluation for Markowitz models and GMD at optimal portfolio selection

Abstract

The main issue for any investor on the stock exchange, pick up shares at maximum profit. The purpose of this research is to create the best portfolio with the least risk and highest returns. mean-variance model for optimal portfolio selection was proposed by Markowitz. Gini's Mean Difference(GMD) was introduced by Yitzhaki. In the mean-variance model, mean as a measure of return and variance is a measure of risk. In the GMD model, the average absolute returns at different times as the risk is considered. In this study, two models (Markowitz and GMD) have been used and theoretical foundations of these models have been described. Performance Portfolio optimization models and test it in action in the Tehran Stock Exchange were examined.

Key words: Markowitz theory, Gini's Mean Difference(GMD), Portfolio.

www.SID.ir