

## هدایت نزدیک بهینه یک کوادروتور با قيود مکانی به روش حریمانه

مهرداد نقشینه<sup>۱</sup>، ابوالقاسم نقاش<sup>۲</sup>

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله یک راهکار زمان-واقعی مبتنی بر روش بهینه سازی حریمانه برای حل مسایل رگولاتور بهینه با وجود قيودی بر روی ورودی‌های کنترل و متغیرهای حالت در یک سیستم دینامیکی ارائه شده است. این روش پس از فرمول‌بندی کلی، برای یک مساله نمونه مورد استفاده قرار گرفته و نتایج آن با روش متداول کنترل بهینه مقایسه شده است. بهینه سازی مسیر پرواز یک کوادروتور با قيود مکانی به عنوان مساله نمونه حل شده و تطابق قابل قبولی بین نتایج حاصل از روش ابداعی و حل بهینه مساله به دست آمده است.

**واژه های کلیدی:** هدایت نزدیک بهینه - کنترل حریمانه - تابع هزینه لحظه‌ای - مسیر پرواز کوادروتور - مدل جرم نقطه‌ای

### مقدمه

تئوری کنترل بهینه برای کاربرد در مهندسی هوافضا در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی توسعه یافت و به مرور زمان به نحو مناسبی تدوین و مستند شد به طوری که روش‌های مشخصی براساس برنامه ریزی پویا و حساب تغییرات برای حل مسایل آن وجود دارد. پس از تدوین مساله کنترل بهینه و تبدیل آن به معادله بلمن (Bellman) در روش برنامه-ریزی پویا یا مساله‌ای شامل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی دوگانه (TPBVP) در روش حساب تغییرات، سه راهکار عمده برای حل و پیاده‌سازی آن وجود دارد:

#### الف- راهکار برون خط (Off-line)

در این راهکار به دلیل پیچیدگی حل، مساله کنترل بهینه به صورت برون خط حل شده و تاریخچه سیگنال‌های بهینه (شامل مسیر یا ورودی‌ها) به سیستم اعمال می‌شود. در این صورت اگر شرایط سیستم در حین انجام فرآیند کنترل، نسبت به آنچه پیش‌بینی شده متفاوت باشد، اعتبار سیگنال‌های بهینه نیز مخدوش خواهد شد. در بهترین حالت (مثلاً) تنظیم کننده‌های خطی) ممکن است قانون کنترل بهینه را بتوان به صورت رابطه‌ای برحسب حالت‌های سیستم بیان نمود که در این صورت یک قانون کنترل بهینه حلقه بسته بدست می‌آید. حتی در این حالت نیز اگر قيودی بر روی ورودی‌های کنترل وجود داشته باشد، لازم است تاریخچه کمک-حالت‌ها (Co-states) نیز در حافظه کنترلر وجود داشته باشد تا تصمیم گیری بهینه در مورد مقدار سیگنال کنترل امکان پذیر گردد. بنابراین با انحراف از شرایط پیش‌بینی شده، اعتبار کمک-حالت‌ها و به تبع آن بهینه بودن تصمیم گیری نیز مخدوش می‌شود.

#### ب- راهکار برخط (On-line)

در بسیاری از کاربردها شرایط مساله به طور کامل و دقیق از قبل مشخص نیست یا اثر اغتشاش در حدی است که انحراف سیستم از رفتار

پیش بینی شده با اهمیت است. در این موارد حل برون خط یا امکان‌پذیر نیست یا بهینه بودن آن در شرایط واقعی مخدوش می‌شود. یک راهکار این است که مسیر و ورودی‌های بهینه به صورت برخط در حین کنترل محاسبه شود ولی فرکانس به روز رسانی مقادیر بهینه می‌تواند کمتر از فرکانس کنترل باشد. به عبارت دیگر یک بهینه ساز برخط، تکه مسیر و ورودی‌های بهینه را برای لحظات آینده تعیین می‌کند و وظیفه کنترلر این است که سیستم را در لحظات آتی براساس خروجی‌های بهینه ساز کنترل کند تا اینکه مسیر بهینه جدید محاسبه شود. برای این منظور بهینه ساز باید قادر به حل مساله کنترل بهینه به صورت برخط باشد و با فرکانس قابل قبولی مسیر بهینه را برای کنترلر تعیین کند. این کار از طریق کاهش مدل یا کاهش حجم محاسبات انجام می‌شود که هر دو روش نهایتاً موجب کاهش سطح بهینگی در رفتار سیستم، ولی در حد قابل قبول، خواهد شد.

به عنوان نمونه‌ای از روش‌های برخط، در مرجع [۱] از طریق تخمین مسیر بهینه با منحنی بیزیجه درجه سه، یک روش برخط برای هدایت بهینه ورود به جو ارائه شده است. در مرجع [۲] با استفاده از منحنی‌های B-spline و همواری دیفرانسیلی، تعداد متغیرها و قيود بهینه سازی کاهش داده شده به طوری که امکان بهینه سازی مسیر به صورت برخط فراهم شده است. در مرجع [۳] نشان داده شده که روش پیشنهادی مذکور قادر است با یک پردازنده Pentium IV-3.2GHz مسیر بهینه یک موشک تعقیب کننده را با گام زمانی 0.2 sec به روزرسانی کند.

#### ج- راهکار زمان-واقعی (Real-time)

در این راهکار سرعت محاسبات به حدی افزایش داده می‌شود که مساله کنترل بهینه با فرکانس کنترل حل می‌شود و در هر لحظه براساس هدف کنترل و قيود سیستم و مقادیر متغیرهای حالت، مقدار بهینه سیگنال کنترلی محاسبه شده و به سیستم اعمال می‌شود. بدیهی است که این روش نیز به حل نزدیک بهینه منجر خواهد شد. از جمله روش‌های موجود برای پیاده سازی کنترلر بهینه به صورت زمان-واقعی می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱- روش ADP برای حل زمان-واقعی و تقریبی معادله بلمن [۴].

۲- روش SDRE برای حل زمان-واقعی و تقریبی معادله ریکاتی که حاصل TPBVP در مساله رگولاتور بهینه است [۵].

بدلیل پیچیدگی در حل دقیق مسایل کنترل بهینه و معایبی که راهکار برون خط به همراه دارد، مهندسين در عمل به دنبال راهکاری هستند که یک قانون کنترلی نزدیک بهینه ولی به شکل حلقه بسته و با قابلیت پیاده سازی برخط یا زمان-واقعی پیشنهاد کند. تلاش‌های مختلفی در این زمینه انجام شده که به مواردی از آن اشاره شد. در این مقاله نیز روشی برای پیاده سازی کنترل بهینه به صورت زمان-واقعی برای دسته‌ای از سیستم‌ها توسعه داده شده است. این روش مبتنی بر مفهومی به نام کنترل حریمانه است که در بخش بعدی بیشتر توضیح داده می‌شود.

۱- دانشجوی مقطع دکترا، ۰۹۱۳۳۱۱۶۱۴۵، m.naghsheh@aut.ac.ir (مخاطب)

۲- دانشیار دانشکده هوافضا

## معرفی روش کنترل حریصانه

کنترل حریصانه مبتنی بر روش بهینه سازی حریصانه است که در آن، تابع هدفی در هر لحظه باید بهینه شود. علت نام گذاری این است که تصمیم حریصانه در یک لحظه (بدون نگاه به آینده) می تواند اثر نامطلوبی بر رفتار سیستم در آینده بگذارد که نهایتاً موجب افزایش مجموع هزینه در کل بازه زمانی خواهد شد. روش حریصانه معمولاً خیلی ساده است زیرا در هر مرحله از انتخاب فقط به بهترین جواب در همان لحظه نگاه می کند؛ یعنی هر انتخاب فقط به طور محلی بهینه می باشد و ممکن است توالی این انتخاب های محلی-بهینه، پاسخ بهینه مساله اصلی را ایجاد نکند. بنابراین باید تعیین شود که آیا پاسخ نهایی بهینه است یا نه؟ یا اینکه در چه شرایطی می تواند به حد کافی به پاسخ بهینه نزدیک باشد.

با این رویکرد، سوال اصلی این است که آیا می توان یک تابع هزینه لحظه ای یافت که بهینه سازی آن در هر لحظه موجب بهینه سازی تابع هزینه انتگرالی در کل بازه زمانی شود؟ پاسخ این سوال برای سیستم های خطی مستقل از زمان نامقید با تابع هزینه مربعی، مثبت است [۶]. هدف این مقاله، تدوین راهکار استفاده از این رویکرد برای سیستم هایی است که با قيودی بر روی متغیرهای حالت یا ورودی های کنترل روبرو هستند.

## سوابق کاربرد روش حریصانه در کنترل سیستم های دینامیکی

اولین بار لاورتسکای (Lavretsky) در سال ۲۰۰۰ مفهوم کنترل بهینه حریصانه را مطرح نمود [۶] و براساس آن یک قانون کنترلی حلقه بسته برای سیستم های افاین (control-affine systems)، یعنی خطی نسبت به ورودی، معرفی کرد و به اثبات پایداری آن پرداخت. وی هدف خود را صرفاً بدست آوردن یک قانون کنترلی حلقه بسته پایدار برای سیستم های غیرخطی افاین ذکر کرده و در مورد اینگونه سیستم ها ادعایی برای تطبیق پاسخ دو تابع هزینه لحظه ای و انتگرالی ندارد. ایشان در مقاله دیگری [۷] که دو سال بعد ارائه نموده نیز مجدداً بر پایداری این روش کنترلی تأکید نموده و شرایط جدیدی برای آن ارائه نموده است.

ژانگ (Zhang) در سال ۲۰۰۸ از روش جستجوی حریصانه در الگوریتم HDP (Heuristic Dynamic Programming) استفاده نمود تا مساله تعقیب کننده بهینه را برای گروهی از سیستم های غیرخطی زمان-گسسته حل کند [۸]. در این مقاله روش جدیدی برای حل برون-خط اینگونه مسائل کنترل بهینه مطرح شده است. هاسین (Bhasin) نیز در سال ۲۰۱۱ به منظور طراحی کنترلر بهینه برای سیستم های غیرخطی با عدم قطعیت، از روش جستجوی حریصانه استفاده نموده است [۹].

## رگولاتور بهینه با افق نامحدود

برای سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۱)$$

که در آن  $x$  بردار متغیرهای حالت و ورودی های کنترل و  $A$  و  $B$  ماتریس های دینامیک و کنترل سیستم هستند، رگولاتور بهینه با افق نامحدود را به عنوان کنترلی تعریف می کنیم که تابع هدف

$$J = \int_0^{\infty} (u^T Ru + x^T Qx) dt \quad (۲)$$

را کمینه کند، که در آن ماتریس های مثبت قطعی  $R$  و  $Q$  ضرایب وزنی برای ورودی های کنترلی و متغیرهای حالت هستند. هرچند زمان نهایی در این مساله بی نهایت تعریف شده، ولی عملاً در یک زمان محدود، بردار  $x$  به اندازه کافی به مبداء مختصات نزدیک خواهد شد. در این مقاله هرچاکه رگولاتور بهینه ذکر شود، منظور همین تعریف فوق است.

## توصیف گسسته رگولاتور بهینه

به دلیل اینکه کنترل حریصانه با توصیف گسسته مفهوم بهتری پیدا می کند، مساله رگولاتور بهینه را به فرم گسسته تعریف می کنیم. روش های مختلفی برای توصیف گسسته سیستم های پیوسته وجود دارد. در ساده ترین روش، رابطه (۱) را به صورت زیر تخمین می زنند:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \cong \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = Ax_k + Bu_k \quad (۳)$$

که در آن  $\Delta t$  گام زمانی نمونه برداری است به طوری که  $t = k \cdot \Delta t$  می باشد. سپس با ساده سازی جبری، توصیف زمان-گسسته سیستم دینامیکی به فرم زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k \\ A_d &= I + \Delta t \cdot A, \quad B_d = \Delta t \cdot B \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن  $I$  ماتریس یکانی با ابعاد ماتریس  $A$  می باشد. در این صورت تابع هزینه (۲) نیز به صورت زیر در حوزه زمان-گسسته توصیف می شود:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{u_k^T R u_k + x_k^T Q x_k\} \quad (۵)$$

## رگولاتور بهینه حریصانه

در مرجع [۶] اثبات شده که برای کنترل بهینه سیستم های خطی مستقل از زمان با تابع هزینه انتگرالی درجه دو که افق نامحدود دارد می توان یک تابع هزینه لحظه ای پیدا کرد که بهینه سازی حریصانه آن موجب بهینه سازی تابع هزینه انتگرالی خواهد شد. این مطلب در قالب قضیه زیر بیان شده است:

**قضیه:** برای کنترل بهینه سیستم (۴) با تابع هدف (۵)، می توان تابع هزینه لحظه ای

$$J_k = u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P x_{k+1} \quad (۶)$$

را به صورت حریصانه بهینه نمود که در آن ماتریس ریکاتی  $P$  از حل معادله جبری ریکاتی برای سیستم های گسسته (DARE) بدست می آید:

$$P = A_d^T (P - P B_d (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P) A_d + Q \quad (۷)$$

در این صورت قانون کنترلی حلقه بسته بهینه به صورت

$$u_k = -(R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d x_k \quad (۸)$$

بدست می آید که اگر ماتریس  $R$  مثبت قطعی و  $Q$  مثبت نیمه قطعی باشد، پایداری مجانبی سراسری برای سیستم حلقه بسته تضمین می شود.

## رگولاتور بهینه برای سیستم مقید

در سیستم های واقعی معمولاً محدودیت هایی برای ورودی های کنترلی و متغیرهای حالت سیستم وجود دارد که حل مساله کنترل بهینه را پیچیده تر می کند. در حقیقت طراحی رگولاتور بهینه ای برای سیستم (۱) با تابع هدف (۲) و قيود

$$\begin{aligned} f(x) &< 0 \\ g(x, u) &< 0 \end{aligned} \quad (۹)$$

مد نظر می باشد که در آن  $f$  برداری از توابع قیود حالت و  $g$  برداری از توابع قیود کنترل است که می تواند وابسته به متغیرهای حالت سیستم نیز باشد (به عنوان مثال حداکثر نیروی پشیران موتور جت ممکن است وابسته به ارتفاع پرواز باشد). همچنین فرض می کنیم تابع  $f$  در تمام دامنه خود نسبت به متغیرهای حالت مشتق پذیر باشد.

روش متداول برای حل مساله کنترل بهینه با چنین قيودی مستلزم تعریف متغیر حالت مجازی مبتنی بر تابع ناپیوسته پله و استفاده از کمک-حالت ها برای رسیدن به تصمیم بهینه در هر لحظه می باشد [۱۰] که معایب آن در مقدمه ذکر شد.

## قیود ورودی‌های کنترل

$$V_f \triangleq \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \dot{x}^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} A^{(1)} x \quad (13)$$

سرعت نزدیک شدن به قید در لحظه آتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V_{f_{k+1}} \triangleq \left( \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \right)_{k+1} A^{(1)} x_{k+1} \quad (14)$$

در این صورت هزینه قید می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$J_k^c \triangleq V_{f_{k+1}}^T M V_{f_{k+1}} \quad (15)$$

که در آن  $M$  یک ماتریس مثبت نیمه قطعی حاوی ضرایب هزینه برای قیود مختلف می‌باشد. افزودن این تابع هزینه به تابع هزینه لحظه‌ای در حقیقت این خواسته را فراهم می‌کند که در هر لحظه در تعیین  $u_k$  علاوه بر بهینگی تابع هزینه اصلی، سرعت نزدیک شدن به قید در لحظه بعدی نیز مورد توجه قرار گیرد. در رابطه (۱۴) توجه شود که ماتریس ژاکوبین در لحظه  $k+1$  وابسته به  $u_k$  نیست و براساس اطلاعات لحظه  $k$  قابل محاسبه می‌باشد (زیرا بردار  $x^{(1)}$  در لحظه  $k+1$  وابسته به  $u_k$  نیست و بردار  $f$  فقط تابع  $x^{(1)}$  است).

وزن این هزینه (یعنی عناصر ماتریس  $M$ ) وابسته به شرایط سیستم تغییر می‌کند. این ضرایب فقط هنگامی مقدار دارند که سیستم در حال نزدیک شدن به قید یا نفوذ به ناحیه غیر مجاز است و در سایر شرایط برابر صفر است. همچنین هرچه سیستم به قید نزدیکتر باشد، هزینه‌ی بیشتری برای سرعت نزدیک شدن باید در نظر گرفته شود. علاوه بر این وزن قید می‌تواند به سرعت نزدیک شدن در لحظه‌ی جاری نیز وابسته باشد. ساختار زیر در چند مساله نمونه با موفقیت پاسخ داده است که نتایج یکی از این موارد در ادامه خواهد آمد:

$$M_k \triangleq \text{diag} \left\{ m_i \frac{V_{f_{ik}}}{|f_{ik}| + \varepsilon_i} \right\} \quad (16)$$

که در آن  $\text{diag}\{\cdot\}$  معرف ماتریس قطری،  $|f_i|$  مقدار نزدیکی به قید شماره  $i$   $V_{f_i}$  سرعت نزدیک شدن به آن قید،  $\varepsilon_i$  عددی مثبت برای جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر در مجاورت قید و  $m_i$  عدد ثابت برای قید  $i$ ام می‌باشد. پارامتر  $k$  اندیس زمان گسسته و معرف لحظه جاری است.

### قانون کنترلی حلقه بسته

برای بدست آوردن قانون کنترلی، ابتدا تابع هزینه لحظه‌ای را از رابطه (۱۲) بدست می‌آوریم و سپس با بهینه سازی پارامتری آن و با در نظر گرفتن قیود کنترل،  $u_k$  را محاسبه می‌کنیم. بنابراین کنترلر باید در هر لحظه مساله بهینه سازی زیر را حل کند:

$$\begin{cases} \text{Minimize } J_k = J_k + J_k^c \\ \text{subject to: } g(x_k, u_k) < 0 \end{cases} \quad (17)$$

معمولا قیود کنترل به صورت حدود اشباع برای  $u_k$  مطرح می‌شود. با توجه به اینکه  $J_k'$  برحسب  $u_k$  یک تابع درجه دوم است، می‌توان نشان داد حل بهینه از صفر قرار دادن گرادیان  $J_k'$  نسبت به  $u_k$  و سپس عبور دادن نتیجه از تابع اشباع به دست می‌آید.

حل معادله  $\partial J_k' / \partial u_k = 0$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_k = -(R + B_d^T (P + N_k) B_d)^{-1} B_d^T (P + N_k) A_d x_k \quad (18)$$

که در آن:

$$N_k = \{A^{(1)}\}^T \left( \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \right)_{k+1}^T M_k \left( \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \right)_{k+1} A^{(1)} \quad (19)$$

با توجه به خاصیت مثبت قطعی بودن دو ماتریس  $P$  و  $N$  به راحتی می‌توان نشان داد که ماتریس هسیان (Hessian) تابع هزینه نسبت به  $u_k$  همواره مثبت قطعی است و لذا حل (۱۸) یک نقطه کمینه محلی برای تابع هزینه لحظه‌ای خواهد بود.

هنگامیکه محدودیت ورودی‌های کنترل به مساله اضافه می‌شود، در اصل کنترل حریصانه را به یک مساله بهینه سازی پارامتری با قیود نامساوی تبدیل می‌کند که روش‌های مشخصی برای حل آن وجود دارد [۱۱]. به عبارت دیگر در هر لحظه باید  $u_k$  به نحوی انتخاب شود که  $J_k$  در حداقل مقدار خود قرار گیرد و محدودیت‌های کنترلی نیز رعایت گردد. همانطور که قبلا اشاره شد باید نشان داده شود که نتیجه بهینه سازی حریصانه، تابع هدف اصلی را نیز بهینه خواهد کرد.

### قیود متغیرهای حالت

یکی از مسایلی که معادلات کنترل بهینه را تا حد زیادی تحت تاثیر قرار می‌دهد و حتی حل عددی TPBVP را نیز با دشواری‌هایی روبرو می‌سازد، وجود قیدهایی بر روی متغیرهای حالت است. خصوصا اگر مساله با قیود متغیر با زمان تصادفی روبرو باشد، راهکار برون خط برای حل آن امکان پذیر نیست. نوآوری این مقاله این است که بابت نزدیک شدن به قید، جمله‌ای به تابع هزینه لحظه‌ای افزوده می‌شود که در کنار بهینه سازی تابع هدف اصلی، موجب ارضاء قید نیز خواهد شد. در این مقاله متغیرهای حالت سیستم را به دو دسته تاثیرپذیر از ورودی‌های کنترل و تاثیرپذیر از متغیرهای حالت تقسیم می‌کنیم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u \quad (10)$$

$x^{(1)}$  برداری است حاوی حالت‌هایی که به طور مستقیم وابسته به  $u$  نیستند. لازم به توجه است که در اکثر سیستم‌های فیزیکی چنین متغیرهای حالتی وجود دارند. به عنوان مثال در هر سیستم مکانیکی که ورودی کنترل آن از جنس نیرو یا شتاب باشد، متغیرهای حالتی که از جنس مکان هستند چنین وضعیتی دارند. در این مقاله مساله برای قیودی که بر روی چنین متغیرهایی تعریف می‌شود فرمول‌بندی شده است؛ ولی تعمیم آن برای قیود سایر متغیرهای حالت نیز امکان پذیر است. بنابراین قیود حالت مذکور در رابطه (۹) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x^{(1)}) < 0 \quad (11)$$

### بیان ایده اصلی

طبق قضیه‌ای که ذکر شد، بهینه سازی لحظه‌ای تابع هزینه  $J_k$  تضمین می‌کند که تابع هزینه‌ی انتگرالی  $J$  برای کل زمان حرکت سیستم بهینه شود. سوال: آیا می‌توان  $J_k$  را به نحوی تعیین نمود که پاسخ بهینه سازی لحظه‌ای، نزدیک یا منطبق بر حل مساله کنترل بهینه مقید باشد؟

برای پاسخ به این سوال باید بررسی کرد که قید را چگونه می‌توان وارد مساله بهینه سازی لحظه‌ای نمود، به طوریکه دید آینده نگرانه به تابع هزینه لحظه‌ای بدهد. نگاه به آینده به این دلیل لازم است که اگر کنترلر صبر کند تا سیستم به مرز قید برسد، ممکن است علی‌رغم تلاش کنترلی زیاد، دینامیک سیستم به گونه‌ای باشد که قید نقض شود. برای این منظور باید قیدی که در لحظات آینده می‌تواند سیستم را با مشکل مواجه کند، به هزینه در لحظه‌ی جاری تبدیل شود و با تابع هزینه لحظه‌ای جمع شود:

$$J_k' \triangleq J_k + J_k^c \quad (12)$$

که  $J_k^c$  سهم قید را از تابع هزینه لحظه‌ای نشان می‌دهد. آنچه می‌تواند به عنوان هزینه قید در هر لحظه عنوان شود، سرعت نزدیک شدن به قید (یا سرعت نفوذ کردن در ناحیه غیر مجاز) است که بر اساس رابطه (۱۱) برحسب متغیرهای حالت به صورت برداری زیر بدست می‌آید:

## تعریف مساله نمونه

قیود مساله که ناشی از محدودیت‌های سخت افزاری و نیازمندی‌های ماموریت است عبارتند از:

$$|\varphi_c|, |\theta_c| \leq 30 \text{ deg} \quad (23)$$

$$f(x) \triangleq 100 - (x - 10)^2 - (y - 20)^2 < 0$$

شرایط اولیه به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$x(0) = [30 \quad 40 \quad 0 \quad 0]^T \quad (24)$$

بنابراین مساله هدایت بهینه عبارت است از تولید فرامین  $\varphi_c$  و  $\theta_c$  به نحوی که پرنده از شرایط اولیه (24) با طی مسیری که قیود (23) را ارضا کند به مبدا مختصات برسد و تابع هدف (2) با تعاریف (22) در کل ماموریت بهینه باشد.

## حل بهینه

برای دستیابی به حل دقیق این مساله به صورت برون خط دو راه وجود دارد. در راه اول مطابق روشی که براساس حساب تغییرات و اصل حداقل پونتیاگین در مرجع [10] آمده ابتدا باید یک متغیر حالت اضافی برای قید حالت تعریف و هامیلتونین تشکیل شود. سپس شرایط لازم برای بهینگی که تعدادی معادله دیفرانسیل است و نیز شرایط مرزی آنها نوشته می‌شود و در نهایت دستگاه معادلات دیفرانسیلی که با شرایط مرزی دوگانه به دست آمده، با استفاده از یک روش عددی حل می‌شود.

راه دوم استفاده از بسته‌های نرم افزاری آماده می‌باشد. در این مقاله حل بهینه با استفاده از نرم افزار GPOPS بدست آمده که اولین بار در سال 2008 در دانشگاه فلوریدا برای حل مسایل کنترل بهینه غیرخطی تدوین شد و آخرین ویرایش آن در سال 2013 عرضه شده است [13]. تاریخچه ورودی‌های بهینه در شکل‌های 2 و 3 و مسیر حاصل از آن در شکل 4 با خطوط پیوسته مشاهده می‌شود. منحنی تغییرات متغیرهای حالت برحسب زمان در شکل‌های 5 تا 8 با خطوط پیوسته دیده می‌شود.

## حل نزدیک بهینه به روش حریصانه

ابتدا یک توصیف زمان-گسسته از رابطه (20) به دست آورده و سپس ماتریس ریکاتی از حل معادله (7) حاصل می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} 174.2072 & 0 & 100.8698 & 0 \\ 0 & 174.2072 & 0 & 100.8698 \\ 100.8698 & 0 & 174.7138 & 0 \\ 0 & 100.8698 & 0 & 174.7138 \end{bmatrix} \quad (25)$$

بنابراین  $J_k$  طبق رابطه (6) تعریف می‌شود. برای تعریف تابع هزینه قید مطابق رابطه (15)، ابتدا سرعت نزدیک شدن به قید را به کمک رابطه (13) برحسب متغیرهای حالت بدست می‌آوریم:

$$V_f = -2(v_x(x - 10) + v_y(y - 20)) \quad (26)$$

با توجه به اینکه فقط یک قید حالت در مساله وجود دارد،  $M$  در رابطه (15) یک اسکالر است که ساختار تابعیت آن را نسبت به قید، مشابه رابطه (16) تعریف می‌کنیم:

$$M = \begin{cases} \frac{mV_f}{|f| + 0.1} & V_f > 0 \\ 0 & V_f \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

که در آن  $m$  ضریبی وابسته به شرایط اولیه سیستم می‌باشد. برای شرایط اولیه مفروض، مقدار  $m=0.19$  به روش آزمون و خطا به دست آمد. روش ارائه شده در این مقاله به کمک نرم افزار Simulink شبیه سازی شد. مسیر نزدیک بهینه در شکل 4 و تاریخچه ورودی‌های کنترل مربوط به آن در شکل‌های 2 و 3 با خطوط گسسته مشاهده می‌شود. همچنین منحنی تغییرات متغیرهای حالت برحسب زمان در شکل‌های 5 تا 8 با خطوط گسسته دیده می‌شود.

مساله نمونه‌ای که برای ارزیابی این روش مورد بررسی قرار گرفته عبارت است از بهینه سازی مسیر پرواز یک کوادروتور در صفحه افقی با قیود مکانی. در این مساله پرنده باید با کمترین تلاش کنترلی از حالت هاور (Hover) در یک نقطه به حالت هاور در نقطه دیگر برسد و مسیر آن از یک ناحیه دایره‌ای شکل عبور نکند. با قرار دادن مبدا مختصات در نقطه مقصد، مساله به طراحی رگولاتور بهینه تبدیل می‌شود. با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، رگولاتور بهینه زمان-واقعی طراحی و نتایج آن بوسیله شبیه سازی با حل بهینه مقایسه می‌شود.

## مدل سازی هدایت کوادروتور

اغلب کوادروتورها دارای حلقه‌های داخلی مبتنی بر کنترلر PID برای پایدارسازی دینامیکی هستند و دستورات هدایتی مربوط به انجام ماموریت را به وسیله پردازنده هوشمند تولید یا از طریق لینک‌های بی سیم دریافت و سپس اجرا می‌کنند. کوادروتوری که در این مقاله مدل سازی می‌شود دستورات هدایتی شامل زوایای رول و پیچ (Roll & Pitch)، سرعت زاویه‌ای یاو (Yaw) و سرعت حرکت عمودی را از طریق شبکه Wi-Fi با فرکانس 30 هرتز دریافت نموده و متقابلاً اطلاعات سنسورها را به ایستگاه زمینی برمی‌گرداند (شکل 1). سنسورهای این پرنده شامل یک IMU برای اندازه گیری زوایای اوپلر، یک فرستنده-گیرنده فراصوت برای ارتفاع و یک سنسور جریان اپتیکی (Optical flow) برای سرعت‌های افقی و عمودی می‌باشد. دستورات هدایتی دریافت شده، بوسیله پردازنده داخلی پردازش شده و به کمک حلقه‌های PID اجرا می‌شود.

براساس این نوع تقسیم وظایف، بهینه سازی مسیر باید در هر لحظه توسط ایستگاه زمینی انجام شود و نتایج آن که همان دستورات هدایتی هستند به پرنده ارسال گردد. در این مساله فرض می‌شود که بدلیل الزامات ماموریت، ارتفاع و زاویه یاو پرنده در کل مسیر باید ثابت بماند. برای مدل سازی هدایت پرنده، فرض شده که فرامین هدایتی به طور آتی اجرا می‌شود و لذا از مدل جرم نقطه‌ای با دو درجه آزادی استفاده شده است. در مرجع [12] معادلات مربوط به حرکت شش درجه آزادی کوادروتور به دست آمده است. با صرف نظر کردن از دینامیک دورانی و صفر قرار دادن زاویه یاو و شتاب عمودی، معادلات فضای حالت برای حرکت دو درجه آزادی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = a_x \\ \dot{v}_y = a_y \end{cases} \quad (20)$$

که در آن فرمان‌های شتاب افقی و عمودی به نحو زیر با زوایای ورودی رول و پیچ مربوط می‌شود ( $g$  شتاب گرانش زمین است):

$$\begin{cases} a_x = g \tan \theta_c \\ a_y = -g \frac{\tan \varphi_c}{\cos \theta_c} \end{cases} \quad (21)$$

## تعریف مساله هدایت بهینه

تابع هدف بهینه سازی مشابه رابطه (2) فرض شده است که در آن:

$$x = [x \quad y \quad v_x \quad v_y]^T$$

$$u = [a_x \quad a_y]^T \quad (22)$$

$$R = I_2, \quad Q = I_4$$

و  $I$  ماتریس یکانی می‌باشد. ماتریس‌های  $R$  و  $Q$  بر اساس نیاز ماموریت می‌تواند به هر نحو دیگری انتخاب شود.

### مقایسه نتایج شبیه سازی

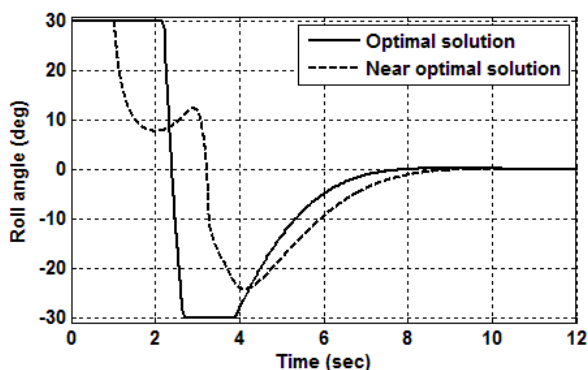
در شکل‌های ۲ و ۳ دیده می‌شود که در مسیر بهینه، پرنده حرکت خود را با حداکثر شتاب شروع نموده و مطابق شکل ۴، در یک لحظه بحرانی شروع به تغییر جهت مسیر خود کرده است. این لحظه بحرانی زمانی است که اگر تغییر مسیر داده نشود، پرنده با قید برخورد خواهد داشت. بدلیل خطاهایی که در مدلسازی وجود دارد، این نوع رفتار می‌تواند به نقض شدن قید در شرایط واقعی منتهی شود و لذا باید یک حاشیه ایمنی برای قید در نظر گرفته شود. مقدار نهایی تابع هدف در روش بهینه برابر  $J_{opt}=6003$  به دست آمده است.

آنگونه که در شکل (۵) دیده می‌شود، در روش حریصانه مسیر پرنده در زمانی زودتر از لحظه بحرانی شروع به تغییر کرده زیرا سرعت نزدیک شدن به قید از ابتدای حرکت در تابع هزینه لحظه‌ای مد نظر قرار گرفته است. مقدار نهایی تابع هدف در این روش برابر  $J_{near,opt}=6516$  به دست آمده است که حدود 8.5% کاهش کارایی را نشان می‌دهد.

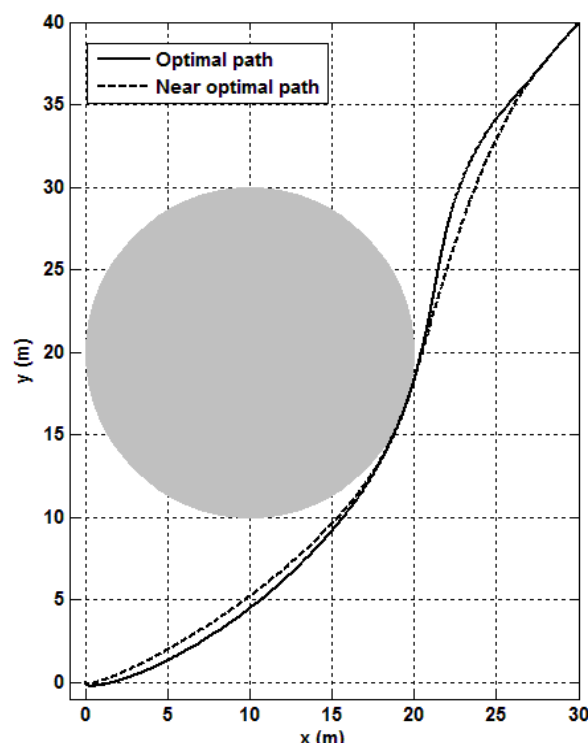
لازم به ذکر است که در این مقاله از ثابت زمانی موتورهای پیشران و دینامیک دورانی پرنده صرف نظر شده است ولی در عمل زوایای رول و پیچ نمی‌تواند تغییرات ناگهانی مانند آنچه از حل بهینه در شکل‌های ۲ و ۳ دیده می‌شود را تجربه کند. همچنین از بررسی شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان دید که حل بهینه در زمان کمتری پرنده را به مقصد رسانیده است که دلیل آن به دامنه بیشتر ورودی‌ها و تغییرات سریع آنها مربوط می‌شود.

### نتیجه گیری

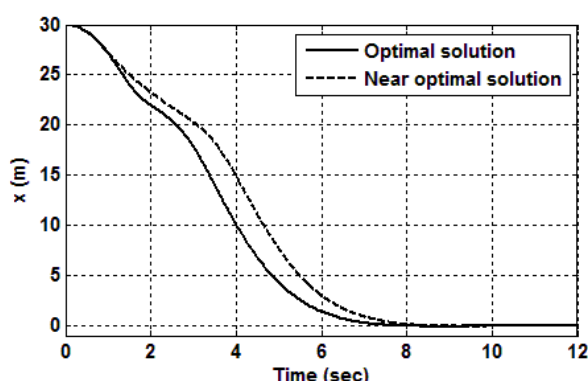
در این مقاله یک روش نزدیک بهینه مبتنی بر بهینه سازی حریصانه برای حل مسایل رگولاتور خطی مقید ارائه شد و نتایج آن برای هدایت یک کوادروتور با قیود مکانی مورد ارزیابی قرار گرفت. این روش ابتدا در حالت کلی فرمول‌بندی شد و یک قانون کنترلی حلقه بسته صریح به دست آمد که بهینه سازی تابع هدف و رعایت قیود را به طور همزمان در نظر می‌گیرد. مزیت عمده این روش، حجم محاسبات کم می‌باشد که قابلیت پیاده سازی آن را به صورت زمان-واقعی فراهم می‌کند.



شکل ۳- ورودی‌های بهینه و نزدیک بهینه زاویه رول ( $\varphi_c$ )



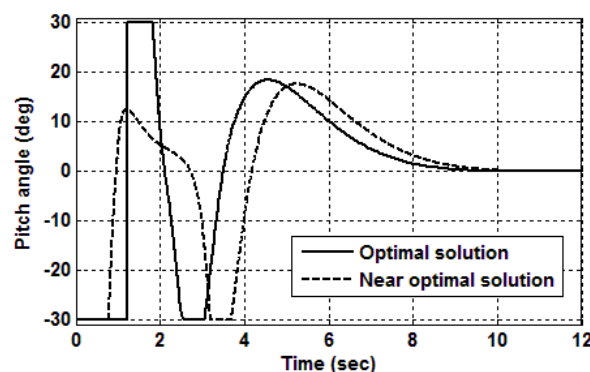
شکل ۴- مسیرهای بهینه و نزدیک بهینه



شکل ۵- موقیت افقی  $x$  در حل بهینه و نزدیک بهینه

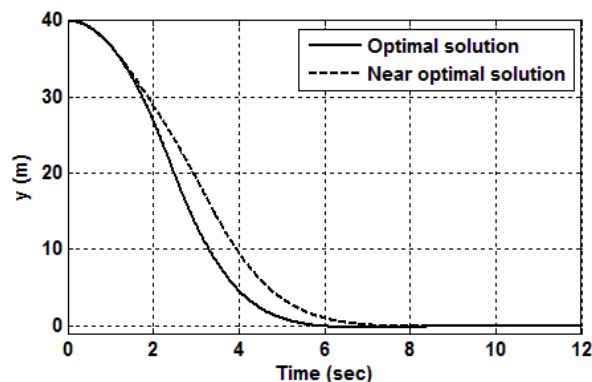


شکل ۱- دیاگرام جعبه‌ای کوادروتور از نظر ورودی و خروجی هدایتی

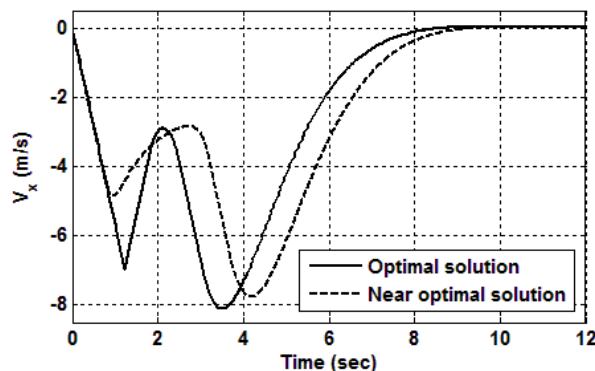


شکل ۲- ورودی‌های بهینه و نزدیک بهینه زاویه پیچ ( $\theta_c$ )

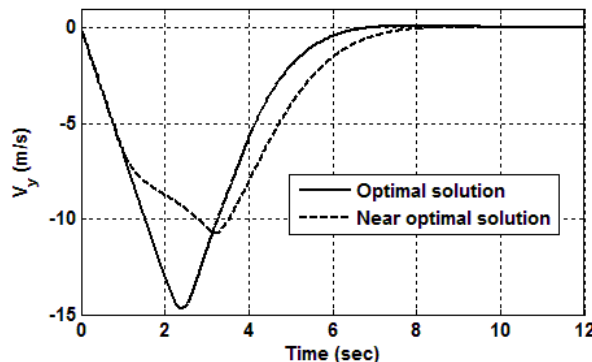
7. E. Lavretsky, Greedy Control Revisited, *Proceedings of the American Control Conference*, 2002.  
 8. H. Zhang, A Novel Infinite-Time Optimal Tracking Control Scheme for a Class of Discrete-Time Nonlinear Systems via the Greedy HDP Iteration Algorithm, *IEEE Transactions on Systems, Manufacturing, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, Vol. 38, No. 4, August 2008.  
 9. S. Bhasin, *Reinforcement Learning and Optimal Control Methods for Uncertain Nonlinear Systems*, PhD thesis, University of Florida, 2011.  
 10. D.E. Kirk, *Optimal Control Theory, an Introduction*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2004.  
 11. A.E. Bryson, Yu-Chi Ho, *Applied Optimal Control*, Taylor & Francis Group, New York, 1975.  
 12. A. Naghash, M. Naghashineh, A. Honari, Minimum Time Trajectory Optimization for Flying a Quadrotor in an 8-shaped Path, International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (IMAV), France, 2013.  
 13. M.A. Patterson, A.V. Rao, *GPOPS-II Version 1.0: A General-Purpose MATLAB Toolbox for Solving Optimal Control Problems Using the Radau Pseudospectral Method*, University of Florida, 2013.



شکل ۶- موقیت افقی  $y$  در حل بهینه و نزدیک بهینه



شکل ۷- سرعت افقی  $V_x$  در حل بهینه و نزدیک بهینه



شکل ۸- موقیت افقی  $V_y$  در حل بهینه و نزدیک بهینه

#### مراجع

۱. رضا اسماعیل‌زاده، هدایت نزدیک بهینه ورود به جو با استفاده از رویکرد حل معکوس، رساله دکترا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران، ۱۳۸۶.  
 ۲. رضا جمیل‌نیا، توسعه روش برخط ترکیبی برای بهینه‌سازی مسیر، رساله دکترا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران، ۱۳۹۰.  
 3. R. Jamilnia, A. Naghash, Optimal Guidance Based on Receding Horizon Control and Online Trajectory Optimization, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 26:786-793, 2013.  
 4. T. Dierks, S. Jagannathan, Online Optimal Control of Nonlinear Discrete-Time Systems Using Approximate Dynamic Programming, *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, 9(3): 361-369.  
 5. T. Cimen, Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(4): 1025-1047.  
 6. E. Lavretsky, Greedy Optimal Control, *Proceedings of the American Control Conference*, 2000.