Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۱۰-۷ شهریور ۱۳۹۵

مروری بر نتایج مجانبی در گراف های غیر متقاطع

مهری جوانیان* و آمنه قدیمی خشت مسجدی

دانشگاه زنجان، javanian@znu.ac.ir
دانشگاه زنجان، ameneh.gh.10@gmail.com

چکیده

گرافی که رئوسش بر روی یک دایره قرار دارند و یال هایش فقط در رئوسش یکدیگر را قطع می نمایند، گراف غیر متقاطع نامیده می شود. در این مقاله ابتدا بر اساس توابع مولد، روش های نمادی و تحلیل تکینی به شمارش این نوع گراف ها می پردازیم. سپس با استفاده از روش های گشتاوری و تحلیل تکینی، امیدریاضی، همگرایی در احتمال و توزیع مجانبی درجهٔ ریشه و بزرگترین درجه در چند نوع گراف غیر متقاطع را وقتی که تعداد رئوسشان افزایش می یابند، مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین نشان می دهیم توزیع مجانبی پارامترهایی در این گراف ها نرمال است.

واژه های کلیدی: گراف های غیر متقاطع، روش گشتاوری، توابع مولد، همگرایی در احتمال، توزیع مجانبی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 05A05، 05C30، 60F05.

۱ مقدمه

به منظور بیان نتایج اصلی پژوهش و ارائه برهان مختصری برای بعضی از آنها، به توضیح تعاریف و قضایای زیر می پردازیم.

تعریف ۱.۱. گراف با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بر روی یک دایره که شماره گذاری رئوس به ترتیب خلاف جهت عقربه های ساعت است را گراف غیر متقاطع می نامند، هرگاه دو یال $\{v_i, v_j\}$ و $\{v_k, v_l\}$ وجود نداشته باشند به طوری که $i < k < j < l$. گره v_1 را ریشه گویند. گراف غیر متقاطع همبند و بدون دور، درخت غیر متقاطع نامیده می شود (درخت شکل ۱ را ملاحظه نمایید).

تعریف ۲.۱. در تابع مولد دنبالهٔ $\{a_{n,m}\}_{n,m\geq 0}$ یعنی $A(z,w) = \sum_{n,m\geq 0} a_{n,m} z^n w^m$، $[z^n w^m]A(z,w) := a_{n,m}$.

قضیه ۳.۱. [۴] فرض نمایید $\{\Omega_n\}_{n\geq 1}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی صحیح مقدار باشد. همچنین فرض نمایید به ازای هر $|s| \leq \tau$، $s \in \mathbb{C}$ و $\tau > 0$، تابع مولد گشتاور Ω_n در عبارت

$$M_n(s) := \mathbb{E}[e^{\Omega_n s}] = \sum_{m\geq 0} \mathbb{P}(\Omega_n = m) e^{ms} = e^{H_n(s)}(1 + \mathcal{O}(\kappa_n^{-1})),$$

صدق نماید که در آن اولا $H_n(s) = u(s)\phi(n) + v(s)$ ($u(s)$ و $v(s)$ توابع تحلیلی بر $|s| \leq \tau$ و مستقل از n هستند. همچنین $u''(0) \neq 0$)، ثانیاً $\phi_n \to \infty$، ثالثاً $\kappa_n \to \infty$. اگر Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد آنگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\Omega_n - u'(0)\phi(n)}{\sqrt{u''(0)\phi(n)}} < x\right\} = \mathbb{P}(Z < x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa_n} + \frac{1}{\sqrt{\phi(n)}}\right).$$

علاوه بر این امیدریاضی و واریانس Ω_n عبارت است از

$$\mathbb{E}[\Omega_n] = u'(0)\phi(n) + v'(0) + \mathcal{O}(\kappa_n^{-1}), \quad \mathbb{V}[\Omega_n] = u''(0)\phi(n) + v''(0) + \mathcal{O}(\kappa_n^{-1}).$$

*سخنران و مسئول مکاتبات

قضیه ۴.۱. [۱] فرض نمایید $F(z,y)$ تابعی تحلیلی در اطراف نقطهٔ $(\circ,\circ)$ باشد به طوری که $F(\circ,y)=\circ$ و ضرایب بسط تیلور F حقیقی و نامنفی در اطراف صفر باشند. در این صورت یک جواب یکتا و تحلیلی $y=y(z)$ برای معادلهٔ تابعی $y=F(z,y)$ با شرط اولیه $y(\circ)=\circ$ وجود دارد به طوری که دارای ضرایب بسط تیلور نامنفی در اطراف صفر است. اگر ناحیه همگرایی $F(z,y)$ به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که اعداد مثبت $z=z_\circ$ و $y=y_\circ$ به عنوان جواب های دستگاه

$$y=F(z,y), \qquad \text{۱}=F_y(z,y),$$

$(F_y(z,y)=\frac{\partial F}{\partial y})$ وجود داشته باشند با شرایط اولیهٔ $F_z(z_\circ,y_\circ)\neq\circ$ و $F_{yy}(z_\circ,y_\circ)\neq\circ$، آنگاه $y(z)$ به ازای $|z|<z_\circ$ تحلیلی است و توابع $g(z)$ و $h(z)$ وجود دارند که در اطراف $z_\circ$ تحلیلی هستند و

$$y(z)=g(z)-h(z)\sqrt{\text{۱}-\frac{z}{z_\circ}}. \tag{۱.۱}$$

همچنین $g(z_\circ)=h(y_\circ)$ و چون $y(z)$ در $z=z_\circ$ تحلیلی نیست، $z_\circ$ را تکینی ریشهٔ دوم برای $y(z)$ می نامند و

$$[z^n]y(z)=\sqrt{\frac{z_\circ F_z(z_\circ,y_\circ)}{\text{۲}\pi F_{yy}(z_\circ,y_\circ)}}\,z_\circ^{-n}n^{-\text{۳}/\text{۲}}(\text{۱}+\mathcal{O}(n^{-\text{۱}})).$$

قضیه ۵.۱. [۳] فرض نمایید $f(z)=\sum_{n\geq\circ}a_nz^n$ تابع مولد دنبالهٔ a_n باشد و $z=\rho$ تنها تکینی ریشه دوم f باشد که در (۱.۱) صدق نماید و در ناحیهٔ $D(\rho,\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C};|z|<\rho+\varepsilon\}\setminus[\rho,+\infty)$ به ازای $\varepsilon>\circ$ای تحلیلی است. همچنین اگر $H(z,t)$ تابعی تحلیلی باشد که به ازای $|z|<\rho+\varepsilon$ و $|t|<f(\rho)+\varepsilon$ داشته باشیم $H_t(\rho,f(\rho)):=\frac{\partial H}{\partial t}\big|_{z=\rho,t=f(\rho)}\neq\circ$، آنگاه $f_H(z):=H(z,f(z))$ دارای سری توانی $f(z)=\sum_{n\geq\circ}g_nz^n$ است که $\lim_{n\to\infty}\frac{g_n}{a_n}=H_t(\rho,f(\rho))$.

لم ۶.۱. [۲] فرض نمایید X متغیر تصادفی گسسته، نامنفی و دارای گشتاور اول و دوم متناهی است. در این صورت

$$\frac{\mathbb{E}^{\text{۲}}(X)}{\mathbb{E}(X^{\text{۲}})}\leq\mathbb{P}\{X>\circ\}\leq\min\{\text{۱},\mathbb{E}(X)\}.$$

۲ نتایج مجانبی

گزاره ۱.۲. فرض نمایید $C(z)=\sum_{n\geq\circ}c_nz^n$ و $T(z)=\sum_{n\geq\circ}t_nz^n$ به ترتیب توابع مولد درخت ها و گراف های همبند غیر متقاطع باشند (t_n و c_n به ترتیب تعداد درخت ها و گراف های همبند غیر متقاطع با n رأس هستند). در این صورت داریم

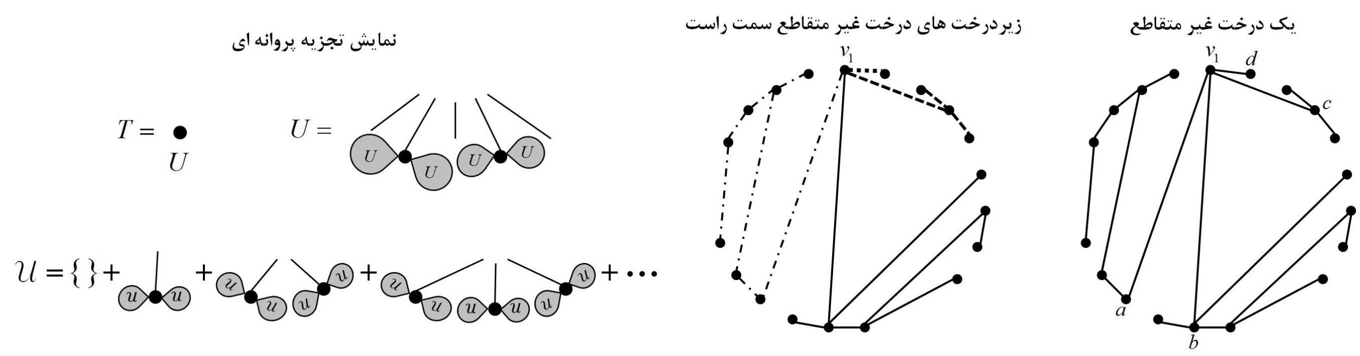
$$T(z)=\frac{z^{\text{۲}}}{z-T(z)^{\text{۲}}}, \qquad C(z)=\frac{zC(z)-\text{۲}z^{\text{۲}}}{C(z)^{\text{۲}}+C(z)-\text{۲}z}. \tag{۱.۲}$$

برهان. با مثالی از یک درخت غیر متقاطع با ریشهٔ $v_\text{۱}$ در شکل ۱ آغاز می نماییم. گره های a، b، c و d ریشه های زیر درخت های $v_\text{۱}$ هستند. هر یک از زیر درخت های $v_\text{۱}$ را یک گراف پروانه ای می نامند که در شکل با ۴ نوع خط متفاوت نشان داده شده اند. در دو سمت راست و چپ ریشهٔ هر زیردرخت $v_\text{۱}$، درخت غیر متقاطعی است (دو بال گراف پروانه ای). حال فرض نمایید $\mathcal{T}$ و $\mathcal{U}$ به ترتیب مجموعه های درخت های غیر متقاطع و درخت های غیر متقاطعی که ریشهٔ آن ها بریده شده است، باشند. همچنین فرض نمایید $U(z)$ تابع مولد $\mathcal{U}$ است. در این صورت اگر مجموعه تک عضوی o شامل یک گره باشد، آنگاه طبق شکل ۱ و روش های نمادی در [۴] داریم

$$\mathcal{T}=o\times\mathcal{U}, \qquad \mathcal{U}=\{\}+(\mathcal{U}\times o\times\mathcal{U})+(\mathcal{U}\times o\times\mathcal{U})^{\text{۲}}+(\mathcal{U}\times o\times\mathcal{U})^{\text{۳}}+\cdots$$

$$T=zU, \qquad U=\text{۱}+zU^{\text{۲}}+(zU^{\text{۲}})^{\text{۲}}+(zU^{\text{۲}})^{\text{۳}}+\cdots=(\text{۱}-zU^{\text{۲}})^{-\text{۱}}.$$

با حل دستگاه معادلات فوق، معادلهٔ اول در (۱.۲) به دست می آید. با روش های نمادی در [۴]، معادلهٔ دوم نیز به دست می آید. □



شکل ۱: نمایش های مربوط به برهان گزارهٔ ۱.۲

قضیه ۲.۲. هر گاه $n \to \infty$ تعداد درخت ها و گراف های همبند غیر متقاطع با n رأس برابر است با

$$t_n = \frac{\sqrt{۳}}{۲۷}\frac{(\frac{۲۷}{۴})^n}{\sqrt{\pi}n^{۳/۲}}(۱ + \mathcal{O}(n^{-۱})), \qquad c_n = \Big(\frac{\sqrt{۶}}{۹} - \frac{\sqrt{۲}}{۶}\Big)\frac{(۶\sqrt{۳})^n}{\sqrt{\pi}n^{۳/۲}}(۱ + \mathcal{O}(n^{-۱})).$$

برهان. طبق (۱.۲) هرگاه $y = T(z)$ و یا $y = C(z)$ باشد، آنگاه تابع $F(z,y)$ در قضیهٔ ۴.۱ به ترتیب $F(z,y) = \frac{z^۲}{z-y^۲}$ و یا $F(z,y) = \frac{zy-۲z^۲}{y^۲+y-۲z}$ است. سپس با استفاده از Maple ، اعداد $z = z_۰$ و $y = y_۰$ به دست می آیند و نتیجه حاصل می شود. □

قضیه ۳.۲. فرض نمایید که هرگاه $v_۱ = k$، d_k^C و d_k^G به ترتیب توزیع مجانبی درجهٔ $v_۱$ در گراف های همبند و معمولی باشند. آنگاه

$$p_C(w) = \sum_{k\geq ۱} d_k^C w^k = \frac{(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲}{۲}\frac{w(w + ۱ + \sqrt{۳})}{(۱ - (۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}w)^۲)},$$
$$p_G(w) = \sum_{k\geq ۱} d_k^G w^k = \frac{(\sqrt{۲} - ۱)^۲}{۲}\frac{(۱ + w)^۲}{(۱ - (\sqrt{۲} - ۱)w)^۲}.$$

برهان. مختصراً محاسبه $p_C(w)$ را توضیح می دهیم و $p_G(w)$ به طور مشابه به دست می آید. طبق (۱.۱)، قضیهٔ ۴.۱ و با استفاده از Maple ، $\rho = \frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$ تکینی ریشهٔ دوم $y = C(z)$ به دست می آید. فرمول $C(z,w)$ یعنی تابع مولد $c_{n,k}$ تعداد گراف های غیر متقاطع همبند با n رأس و درجهٔ ریشهٔ k، در [۳] به دست آمده است. بنابراین طبق رابطهٔ توزیع مجانبی و ضرایب توابع مولد تعریف می کنیم

$$H(z, C(z)) := C(z,w) = \frac{z - \frac{zw}{۲}(۱ - z - \sqrt{۱ - ۶z + z^۲})}{۱ - \frac{w}{۲}\Big(۱ + z - \sqrt{۱ - ۶z + z^۲}\Big)}$$

حال مجددا به کمک Maple مقدار $H_t(\rho, C(\rho))$ را به دست می آوریم و بر اساس قضیهٔ ۵.۱ نتیجه حاصل می شود. □

نتیجه ۴.۲. توزیع های مجانبی درجهٔ ریشه در گراف های غیر متقاطع همبند و معمولی عبارتند از

$$d_k^C \sim \Big(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\Big)k\Big(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\Big)^k, \qquad d_k^G \sim k(\sqrt{۲} - ۱)^k.$$

برهان. با استفاده از بسط مک لورن $p_C(w)$ و $p_G(w)$ در قضیهٔ ۳.۲، نتیجه حاصل می شود. □

برای تحلیل مجانبی Δ_n بزرگترین درجه در یگ گراف غیر متقاطع با n رأس، از روشی موسوم به «روش گشتاوری» استفاده می شود. فرض نمایید $Y_{n,k}$ متغیر تصادفی باشد که تعداد گره های با درجهٔ بزرگتر از k را در یک گراف غیر متقاطع با n رأس می شمارد. این متغیر تصادفی ارتباط نزدیکی با Δ_n دارد زیرا

$$Y_{n,k} > ۰ \Longleftrightarrow \Delta_n > k. \qquad (۲.۲)$$

لم ۵.۲. فرض نمایید $d_{n,k}$ احتمال انتخاب یک رأس به تصادف از بین رئوس یک گراف غیر متقاطع با n رأس باشد به طوری که دارای درجهٔ k است. همچنین فرض نمایید $d_{n,k,l}$ احتمال انتخاب دو رأس به تصادف از بین رئوس یک گراف غیر متقاطع با n رأس باشد به طوری که دارای درجهٔ k و l هستند. در این صورت داریم

$$\frac{n^{۲}\left(\sum_{l>k} d_{n,l}\right)^{۲}}{n\sum_{l>k} d_{n,l}+n(n-۱)\sum_{l_۱,l_۲>k} d_{n,l_۱,l_۲}} \leq \mathbb{P}(\Delta_n>k) \leq \min\{۱, n\sum_{l>k} d_{n,l}\}.$$

برهان. اگر $۱_{\{d(v)=k\}}$ تابع نشانگر این پیشامد باشد که $d(v)$ درجهٔ رأس v برابر k شود، آنگاه $X_{n,k}=\sum_v ۱_{\{d(v)=k\}}$ تعداد رأس هایی را می شمارد که درجهٔ آن ها k است و $Y_{n,k}=\sum_{l>k} X_{n,l}$. بنابراین $\mathbb{E}(Y_{n,k})$ و $\mathbb{E}(Y_{n,k}^{۲})$ از

$$\mathbb{E}(X_{n,k})=nd_{n,k}, \qquad \mathbb{E}(X_{n,k}X_{n,l})=n(n-۱)d_{n,k,l},$$

محاسبه می شوند. سپس با استفاده از لم ۶.۱ و (۲.۲)، کران های فوق برای $\mathbb{P}(\Delta_n>k)=\mathbb{P}(Y_{n,k}>\circ)$ به دست می آیند. □

قضیه ۶.۲. فرض نمایید هرگاه $n\to\infty$، d_k توزیع مجانبی $d_{n,k}$ باشد و همچنین سه فرض زیر برقرار باشد:

(۱) هرگاه $\circ<q<۱$ و $k\to\infty$، $\log d_k \sim k\log q$.

(۲) هرگاه $n,k,l\to\infty$ و $k,l\leq C\log n$ $(C>\circ)$، $d_{n,k}\sim d_k,\ d_{n,k,l}\sim d_k\, d_l$

(۳) عدد $\bar{q}>۱$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n,k,l\geq ۱$، $d_{n,k}=\mathcal{O}(\bar{q}^k),\ d_{n,k,l}=\mathcal{O}(\bar{q}^{k+l})$.

در این صورت برای Δ_n دو نتیجهٔ زیر گرفته می شود:

$$\frac{\Delta_n}{\log n}\to\frac{۱}{\log(q^{-۱})}, \quad (\text{همگرایی در احتمال}) \qquad \mathbb{E}(\Delta_n)\sim\frac{۱}{\log(q^{-۱})}\log n \quad (n\to\infty).$$

برهان. با استفاده از لم ۵.۲ و قضیهٔ چبیشف، همگرایی در احتمال به دست می آید. از طرفی چون

$$\mathbb{E}(\Delta_n)=\sum_{k\geq\circ}\mathbb{P}\{\Delta_n>k\}=\sum_{k\geq\circ}\mathbb{P}\{Y_{n,k}>\circ\},$$

است و با به کار بردن لم ۵.۲ کران هایی برای $\mathbb{E}(\Delta_n)$ قابل دسترسی است که از آن ها نتیجه دوم قضیه حاصل می شود. □

توجه ۷.۲. به کمک لم های ۳,۱ و ۳,۲ در [۲] سه شرط قضیهٔ ۶.۲ برای گراف های غیر متقاطع برآورده می شوند و مقدار q حاصل می شود. به طور مثال برای یک گراف غیر متقاطع همبند $q=۱-۱/\sqrt{۳}$ است.

تابع مولد $f(z,w)=\sum_{n,k\geq\circ} f_{n,k}z^n w^k$ را برای گراف های غیر متقاطع در نظر بگیرید. فرض نمایید $f_{n,k}$ تعداد گراف های غیر متقاطع با n رأس باشد که در آن ها پارامتر χ برابر k است. پارامتر χ می تواند تعداد زیرگراف های همبند در یک گراف غیر متقاطع، تعداد یال ها در یک گراف غیر متقاطع همبند، تعداد برگ ها در یک درخت غیر متقاطع و غیره باشد. چون تابع مولد f در معادلهٔ بازگشتی به صورت $f=F(z,w,f)$ صدق می نمایند، آنگاه بر اساس برهانی مشابه برهان قضیهٔ ۴.۱ در [۱]، نشان داده می شود که به ازای هر w در همسایگی کوچکی از ۱، توابع $c_\circ(w)$ و $c_۱(w)$ (در ۱ تحلیلی اند) وجود دارند به طوری که

$$f(z,w)=c_\circ(w)+c_۱(w)\sqrt{۱-z/\rho(w)}+\mathcal{O}(۱-z/\rho(w)), \qquad (۳.۲)$$

و $\rho(w)$ تکینی ریشهٔ دوم برای f است.

قضیه ۸.۲. توزیع مجانبی تعداد برگ ها در یک درخت غیر متقاطع، تعداد یال ها در یک گراف غیر متقاطع همبند، و تعداد زیرگراف های همبند در یک گراف غیر متقاطع، نرمال با میانگین $\mu_n \sim \kappa n$ و $\sigma_n^۲ \sim \lambda n$ واریانس است که در آن n تعداد رأس های گراف، κ و λ مقادیر ثابت قابل محاسبه هستند.

برهان. فرض نمایید $f_n := \sum_{k\geq ۰}[w^k][z^n]f(z,w)$. در این صورت براساس آنالیز تکینی از (۳.۲) داریم

$$f_n(w) := [z^n]f(z,w) = \gamma(w)\left(\frac{۱}{\rho(w)}\right)^n\left(۱+\mathcal{O}\Big(\frac{۱}{n^{۱/۲}}\Big)\right),$$

که در آن γ تابعی تحلیلی است. در نتیجه تابع مولد احتمال پارامتر χ در فرمول زیر صدق می نماید:

$$q_n(w) := \frac{f_n(w)}{f_n} = \frac{\gamma(w)}{\gamma(۱)}\left(\frac{\rho(۱)}{\rho(w)}\right)^n\left(۱+\mathcal{O}\Big(\frac{۱}{n^{۱/۲}}\Big)\right) = e^{\ln\left(\frac{\gamma(w)}{\gamma(۱)}\right)+n\ln\left(\frac{\rho(۱)}{\rho(w)}\right)}\left(۱+\mathcal{O}\Big(\frac{۱}{n^{۱/۲}}\Big)\right).$$

بنابراین به ازای هر s در همسایگی کوچکی از ۰، تابع مولد گشتاور پارامتر χ به صورت زیر است:

$$M_n(s) := q_n(e^s) = e^{\ln\left(\frac{\gamma(e^s)}{\gamma(۱)}\right)+n\ln\left(\frac{\rho(۱)}{\rho(e^s)}\right)}\left(۱+\mathcal{O}\Big(\frac{۱}{n^{۱/۲}}\Big)\right).$$

حال با به کاربردن قضیهٔ ۳.۱ و قرار دادن $\phi(n)=n$، $u(s)=\ln\left(\frac{\rho(۱)}{\rho(e^s)}\right)$ و $v(s)=\ln\left(\frac{\gamma(e^s)}{\gamma(۱)}\right)$ نتیجه حاصل می شود. □

مراجع

[1] M. Drmota, *Random Trees*, Springer, Wien-New York, 2009.

[2] M. Drmota, O. Gimenez, M. Noy, The maximum degree of series-parallel graphs, *Combin. Probab. Comput.* **20**(2011), 529-570.

[3] M. Drmota, A. D. Mier, M. Noy, Extremal statistics on non-crossing configurations, *Discrete Mathematics* **327**(2014), 103-117.

[4] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[5] P. Flajolet, M. Noy, Analytic Combinatorics of Non-crossing Configurations, *Discrete Mathematics* **204**(1999), 203-229.