

## برآورد پارامترهای مدل بولی با استفاده از روش‌های استرئولوژی

حمید قربانی

دانشگاه کاشان، hamidghorbani@kashanu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله ابتدا به اختصار مدل بولی در  $\mathbb{R}^d$  به عنوان یک مدل معروف در هندسه تصادفی معرفی می‌شود. سپس پارامترهای مدل در حالت خاص  $d = 3$  وقتی مجموعه‌های مقدماتی مدل بولی، گوی‌هایی به شعاع تصادفی هستند، به کمک روش‌های استرئولوژی برآورد می‌شوند. به عنوان کاربرد، حفره‌های سه‌بعدی در نان صنعتی با استفاده از مدل بولی بیان و برآوردگر پارامترهای مورد علاقه در فاز حفره‌ها، ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: روش‌های استرئولوژی، عدد تحذب ویژه، مدل بولی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 52A22, 62G05, 62M30, 60D05.

### ۱ مقدمه

استرئولوژی یک زیر شاخه خاص از مبحث استنباط آماری برای مجموعه‌های تصادفی است. هدف آن استنباط راجع به پارامترهایی نظیر کسر حجمی، مساحت رویه‌ی فاز مورد علاقه و غیره در یک ساختار تصادفی سه‌بعدی است. به عنوان مثال می‌توان به برآورد کسر حجمی تومور یا مساحت رویه آن در یک بافت بدن اشاره کرد [۴]. فرض می‌شود که تنها اطلاعات در دست از چنین ساختارهای سه‌بعدی، برش‌های سطح یا کاونده‌های خطی این ساختارها هستند. به عبارت دیگر، استرئولوژی علم استنباط آماری در مورد پارامترهای مورد علاقه یک ساختار تصادفی سه‌بعدی با استفاده از نمونه‌هایی از ابعاد پایینتر این ساختار است. به عنوان مثال در مورد تومور فرض کنید فقط برش‌های سطح ساختار سه‌بعدی در دست است و علاقه‌مند به برآورد کسر حجمی تومور با استفاده از این اطلاعات هستیم. امروزه روش‌های استرئولوژی به طور گسترده‌ای در علوم و مهندسی کاربرد دارد که از آن جمله می‌توان به پزشکی (آناتومی، بافت شناسی، آسیب شناسی)، اکولوژی (کانی شناسی، زمین شناسی نفت)، علم مواد (متالورژی، بتون و سرامیک) اشاره نمود. استرئولوژی ارتباط زیادی با تجزیه و تحلیل تصویر دارد. به این مفهوم که هنگام بررسی تصاویر دوبعدی، فرایندی شامل اندازه‌گیری‌های مختلف روی تصویر مثل فرم، مقدار روشنی یا تاریکی پیکسل موجود در تصویر یا کل مساحت مربوط به هر فاز تصویر و غیره مورد نیاز می‌باشد. روابط استرئولوژیک مجموعه‌ای از ابزارها فراهم می‌آورد که به کمک آن‌ها می‌توان برخی اندازه‌گیری‌های انجام شده روی تصویر را به پارامترهای مهم ساختار سه‌بعدی مرتبط نمود. بعلاوه می‌توان ادعا نمود که این پارامترها به درستی ساختار سه‌بعدی را توصیف می‌نمایند.

در ادامه ابتدا مدل بولی در  $\mathbb{R}^d$  معرفی و سپس با استفاده از روابط استرئولوژی، پارامترهای آن را برآورد می‌کنیم. به عنوان یک کاربرد ساختار تصادفی سه‌بعدی حفره‌ها در نان با استفاده از مدل بولی، بیان و برای پارامترهای آن نظیر متوسط حجم حفره‌ها، برآوردگرهایی ارائه می‌شود.

فرض کنید  $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$  یک فرآیند نقطه‌ای پواسون مانا با شدت  $\lambda$  در  $\mathbb{R}^d$  باشد. همچنین  $X_1, X_2, \dots$  دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده‌ی تصادفی مستقل و هم‌توزیع در  $\mathbb{R}^d$  باشند که از فرآیند پواسون  $\Phi$  مستقل هستند. مدل بولی با استفاده از جرم‌های  $x_n$  و مجموعه‌های مقدماتی  $X_n$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n + x_n) \quad (1.2)$$

برای اطلاعات بیشتر به [۳] مراجعه کنید.

به عنوان حالت خاص فرض کنید  $d = 3$  و مجموعه‌های مقدماتی را گوی‌هایی به مرکز مبدا مختصات و شعاع تصادفی  $R$  در نظر بگیرید. در این صورت مدل بولی (۱.۲) به صورت

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} b(x_i, R) \quad (2.2)$$

ارائه می‌شود که در آن  $b(x_i, R)$  گوی‌هایی به مرکز  $x_i$  و شعاع  $R$  هستند. به‌طور کلی پارامترهای این مدل عبارتند از شدت فرآیند نقطه‌ای  $\lambda$ ، میانگین حجم گوی‌ها  $\bar{V}$ ، میانگین مساحت رویه‌ی گوی‌ها  $\bar{S}$  و میانگین قطر گوی‌ها  $\bar{b}$ . در عمل، مدل بولی در یک پنجره‌ی  $W \subset \mathbb{R}^3$  مشاهده می‌شود که با استفاده از این تک نمونه به برآورد پارامترهای مدل بولی می‌پردازیم.

به عنوان کاربرد، در ادامه مدل (۲.۲) را برای توصیف ساختار سه‌بعدی حفره‌ها در یک نوع نان مورد استفاده قرار می‌دهیم [۲]. توجه کنید که توصیف این ساختار از این جهت دارای اهمیت است که اندازه این حفره‌ها که به فرآیند پخت‌نان بستگی دارد، روی طعم و نرمی نان تاثیرگذار است.



شکل ۱: ساختار سه‌بعدی حفره‌ها در نان.

شکل هندسی حفره‌های نان را گوی‌هایی با شعاع تصادفی  $R$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مرکز این حفره‌ها یک تحقق از فرآیند نقطه‌ای پواسون با شدت  $\lambda$  در  $\mathbb{R}^3$  باشد، یعنی این مراکز به طور کاملاً تصادفی توزیع شده‌اند.

### ۳ برآورد پارامترهای مدل بولی

نکته‌ی اساسی در برآورد پارامترها این است که اگر  $X \subset \mathbb{R}^3$  یک مدل بولی تعریف شده توسط رابطه‌ی (۲.۲) باشد، سطح مقطع این مدل با صفحه‌ای دلخواه، یک مدل بولی در  $\mathbb{R}^2$  است [۳]. مجموعه‌های مقدماتی این مدل بولی دیسک‌هایی با شعاع تصادفی

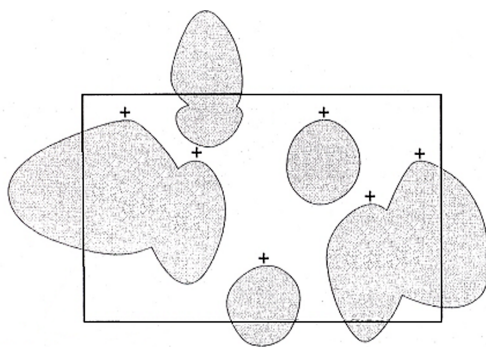
می‌باشند، که البته شعاع دیسک‌ها با شعاع گوی‌ها هم توزیع نیستند.

پارامترهای مدل بولی حاصل عبارتند از شدت فرایند نقطه‌ای که از مرکز دیسک‌ها تشکیل شده، میانگین مساحت دیسک‌ها  $\bar{A}$  و میانگین محیط دیسک‌ها  $\bar{U}$ . بین پارامترهای مدل بولی در  $\mathbb{R}^3$  و مفاهیم متناظر با آن‌ها در  $\mathbb{R}^2$  روابط استرئولوژی زیر برقرار است [۲]

$$\begin{aligned} A_A &= 1 - \exp(-\lambda \bar{V}), \\ L_A &= \frac{\pi}{4} \lambda \bar{S} \exp(-\lambda \bar{V}), \\ N_A^+ &= \lambda \bar{b} \exp(-\lambda \bar{V}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

در رابطه‌ی فوق  $A_A$  کسر مساحت،  $L_A$  متوسط طول مرز دیسک‌ها در مساحت واحد (طول مرز ویژه) و  $N_A^+$  عدد تحدب ویژه‌ی مدل بولی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

نیمرخ‌های موجود در برش مسطح، که با استفاده از دستگاه مختصات  $(x, y)$  تهیه شده است را در نظر بگیرید. مجموعه‌های حاصل از برش مسطح که در ادامه ذرات نامیده می‌شوند، همگی محدب‌اند و هر کدام یک "نقطه‌ی راست بالا" روی مرزشان دارند (نقطه‌ی راست بالا، نقطه‌ای است با بیشترین مختصات  $y$ . اگر نقطه‌ی تکی با بیشترین مختصات  $y$  وجود نداشته باشد، از بین این نقاط، نقطه‌ای که دارای بیشترین مختصات  $x$  است را انتخاب می‌کنیم). در شکل ۲ شدت فرایند نقطه‌ای نقاط راست بالا که با ذرات دیگر هم‌پوشانی ندارند، با  $N_A^+$  نشان داده شده است. به عبارت دیگر  $N_A^+$  شدت فرایند نقطه‌ای نقاط راست بالای اجتماع همه‌ی ذرات بالایی است و می‌تواند بدون شناسایی ذرات اصلی تعیین شود.



شکل ۲: نمایش نقاط راست بالا.

روش کار این است که ابتدا پارامترهای  $A_A$ ،  $L_A$  و  $N_A^+$  را به کمک مدل بولی حاصل از برش مسطح برآورد می‌کنیم [۱] و برای برآورد پارامترهای مدل بولی  $X \subset \mathbb{R}^3$  از معادله‌های زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \hat{A}_A &= 1 - \exp(-\hat{\lambda} \hat{V}) \\ \hat{L}_A &= \frac{\pi}{4} - \hat{\lambda} \hat{S} \exp(-\hat{\lambda} \hat{V}) \\ \hat{N}_A^+ &= -\hat{\lambda} \hat{b} \exp(-\hat{\lambda} \hat{V}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

اما همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این یک دستگاه سه‌معادله و چهارمجهول است و جواب یکتا ندارد. یک ترفند استرئولوژی این است که شعاع گوی‌ها را دارای توزیع نرمال یا لگ نرمال در نظر بگیریم. به عنوان مثال وقتی  $R$  دارای توزیع نرمال است، از

معادله‌های (۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{3L_A}{2\pi^2 N_A^+} + \left[ \frac{9L_A^2}{4\pi^2 N_A^+} + \frac{3(1-A_A)\ln(1-A_A)}{4\pi N_A^+} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda &= \frac{N_A^+}{2\mu(1-A_A)}, \\ \sigma^2 &= \frac{L_A}{\pi^2 \lambda(1-A_A)} - \mu^2.\end{aligned}\tag{۳.۳}$$

اثبات این‌که روابط بالا چگونه بدست آمده‌اند به صورت زیر می‌باشد.

فرض کنید توزیع شعاع‌ها، نرمال با پارامترهای  $(\mu, \sigma^2)$  باشد. (نکته این‌که توزیع نرمال، تنها در صورتی مفید است که  $\mu > 3\sigma$  باشد، در غیر این‌صورت احتمال منفی بودن شعاع وجود دارد). با استفاده از روابط (۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}1 - A_A &= \exp\{-\lambda\bar{V}\} \Rightarrow \ln(1 - A_A) = -\lambda\bar{V}, \\ \frac{4L_A}{\pi\lambda\bar{S}} &= \exp\{-\lambda\bar{V}\} \Rightarrow \frac{4L_A}{\pi\lambda\bar{S}} = 1 - A_A, \\ \frac{N_A^+}{\lambda\bar{b}} &= \exp\{-\lambda\bar{V}\} \Rightarrow \frac{N_A^+}{\lambda\bar{b}} = 1 - A_A.\end{aligned}\tag{۴.۳}$$

پارامترهای  $\bar{V}$ ،  $\bar{S}$ ،  $\bar{b}$  برای گوی‌هایی به شعاع  $R$  به صورت زیر می‌باشند [۳]:

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{4}{\pi} \pi E(R^2) = \frac{4}{\pi} \pi (\mu^2 + 3\mu\sigma^2), \\ \bar{S} = 4\pi E(R^2) = 4\pi (\mu^2 + \sigma^2), \\ \bar{b} = 2E(R) = 2\mu. \end{cases}$$

مسأله، حل دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهول (۴.۳) می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{N_A^+}{2\mu(1-A_A)}, \\ \sigma^2 &= \frac{L_A}{\pi^2 \lambda(1-A_A)} - \mu^2.\end{aligned}$$

اگر مقدار  $\lambda$  را در معادله  $\sigma^2$  قرار دهیم، آن‌گاه:

$$\sigma^2 = \frac{2L_A\mu}{\pi^2 N_A^+} - \mu^2.$$

برای بدست آوردن  $\mu$  ابتدا مقادیر  $\lambda$  و  $\sigma^2$  در معادله اول رابطه (۴.۳) جایگذاری می‌کنیم، لذا

$$\ln(1 - A_A) = \frac{-2\pi^2 N_A^+ \mu^2 - 12L_A\mu + 6\pi^2 N_A^+ \mu^2}{3\pi(1 - A_A)},$$

این معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$4\pi^2 N_A^+ \mu^2 - 12L_A\mu - 3\pi(1 - A_A)\ln(1 - A_A) = 0,$$

که یک معادله‌ی درجه دو بر حسب  $\mu$  با

$$\Delta = 144L_A^2 + 4(4\pi^2 N_A^+)(3\pi(1 - A_A)\ln(1 - A_A)),$$

و ریشه‌های

$$\mu = \frac{12L_A \pm [144L_A^2 + 4(4\pi^2 N_A^+)(3\pi(1 - A_A) \ln(1 - A_A))]^{\frac{1}{2}}}{8\pi^2 N_A^+}.$$

است. چون  $\mu$  نباید منفی شود، لذا

$$\mu = \frac{3L_A}{2\pi^2 N_A^+} + \left[ \frac{9L_A^2}{4\pi^4 N_A^{+2}} + \frac{3(1 - A_A) \ln(1 - A_A)}{4\pi N_A^+} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

از آنجایی که مقدار  $\mu$  بر حسب مقادیر معلوم بدست آمده است، مقادیر  $\lambda$  و  $\sigma^2$  نیز براحتی بدست می‌آیند. به‌طور مشابه اگر  $R$  دارای توزیع لگ‌نرمال باشد با انجام چند معادله‌ی جبری می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-3\pi^5 N_A^{+3}}{32L_A^2} \ln(1 - A_A), \\ \sigma^2 &= \frac{-3N_A^+}{8L_A^2} \pi^2 (1 - A_A) \ln(1 - A_A), \\ \mu &= \ln\left(\frac{2L_A}{\pi^2 N_A^+}\right) - \frac{3}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

بدیهی است، دقت برآوردگرهای بدست آمده به دقت برآوردگرهای  $L_A$ ،  $A_A$  و  $N_A^+$  بستگی دارد و چون توزیع برآوردگرهای اخیر هنوز ناشناخته است، لذا ارائه‌ی فرمول دقیق برای خطاهای استاندارد غیرممکن است، مگر اینکه از روش‌های شبیه‌سازی استفاده شود. برای اطلاعات بیشتر در مورد استنباط آماری برای مدل بولی به [5] مراجعه کنید.

## مراجع

[1] قربانی، ح. مجموعه‌های تصادفی و استنباط آماری برای مدل‌های بولی، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی (۱۳۷۹).

- [2] U. Bindrich and D. Stoyan, Stereology for probes in wheat bread: statistical analysis for the Boolean model by serial sections, *J. Microscopy* **162**(1991), 231-239.
- [3] S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke, *Stochastic Geometry and Its Application*, J. Wiley & Sons, 2013.
- [4] R. Marcos, R. A. F. Monteiro and E. Rocha, The use of design based stereology to evaluate volumes and numbers in the liver: a review with practical guidelines, *J. Anat.* **220**(2012), 303-317.
- [5] I. Molchanov, *Statistics of Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*, J. Wiley & Sons, 1997.