Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۱۰-۷ شهریور ۱۳۹۵

درک نموداری دانشجویان سال اول دانشگاه از مشتق اول و دوم تحت چارچوب APOS-Triad

وحید برجی* و سید حسن علم‌الهدائی
دانشگاه فردوسی مشهد، Vahid.borji@stu.um.ac.i
دانشگاه فردوسی مشهد، alam@um.ac.ir

چکیده

در این مقاله درک دانشجویان سال اول دانشگاه را از یک مسئله‌ی نموداری در ارتباط با مشتق اول و دوم بررسی کرده‌ایم. یک مسئله‌ی غیر متعارف که حاوی شرایطی روی علامت‌های مشتق اول و دوم تابع f است به دانشجویان ارائه کردیم و از آنها خواستیم نمودار تابع f را رسم کنند. برای بررسی پاسخ‌های دانشجویان از طرحواره‌ی نموداری حساب دیفرانسیل بیکر[1] و همکاران استفاده کرده‌ایم. بیشتر دانشجویان حاضر در تحقیق ما در حل این مسئله مشکل داشتند. در مصاحبه‌هایی که با دانشجویان انجام دادیم درک آنها را در قسمت‌هایی که قادر به انجام آن بودند و قسمت‌هایی که مشکلاتی در انجام آن داشتند، کشف کردیم.

واژه‌های کلیدی: درک نموداری، نظریه APOS ، پیشرفت طرحواره، مشتق اول، مشتق دوم.

1 مقدمه

معمولا دانشجویان می‌توانند از یک تابع دارای ضابطه‌ی مشخص، مشتق اول و دوم بگیرند و توابع $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورند. اما همین دانشجویان درک کمتری از بازنمایی نموداری مشتق اول و دوم دارند و در رسم نمودار f بر اساس اطلاعات مشتق اول و دوم با مشکل مواجه می‌شوند ([6],[2]). در این تحقیق درک نموداری دانشجویان سال اول دانشگاه را از مشتق اول و دوم بررسی کرده‌ایم. اطلاعاتی در مورد علامت مشتق اول، f'، و دوم، f''، روی بازه‌های مشخص به دانشجویان دادیم و از آن‌ها خواستیم که نمودار یک تابع f با شرایط داده شده را رسم کنند. همان‌طور که نتایج تحقیقات نشان می‌دهد ([4],[3]) بیشتر دانشجویان و دانش‌آموزان در کلاس‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توانند از توابع جبری مشتق بگیرند و فرمول f' را به دست آورند یا معادله‌ی خط مماس به یک منحنی با ضابطه‌ی جبری مشخص را در یک نقطه‌ی دلخواه به دست آورند ولی آیا دانشجویان و دانش‌آموزان می‌توانند این مفاهیم را درک کنند، اگر به فرم ضابطه‌های جبری ارائه نشده باشند و تنها در قالب نموداری بیان شده باشند؟

نظریه APOS – نظریه‌ی APOS به طور اساسی توصیف می‌کند که مفاهیم ریاضی چگونه یاد گرفته می‌شوند. در واقع به عنوان یک چارچوب توضیح می‌دهد که چگونه فراگیران درکشان را از یک مفهوم ریاضی می‌سازند. طبق نظریه‌ی APOS مفاهیم ریاضی به طور مستقیم یادگرفته نمی‌شوند بلکه در ابتدا ساختارهای مرتبط با آن مفهوم در ذهن فراگیران ساخته می‌شود، که به فرضیه‌ی یادگیری ریاضیات معروف است. همچنین دانش ریاضی یک فرد یعنی تمایل وی برای پاسخگویی به یک موقعیت مسئله‌ی ریاضی از طریق ساخت یا بازسازی ساختارهای ذهنی[2] که در موقعیت‌های مختلف از آن‌ها استفاده می‌نماید. ساختارهای ذهنی نظریه APOS عبارتند از عمل[3]، فرایند[4]، شئ[5] و طرحواره[6].

* سخنران و مسئول مکاتبات

[1] Baker
[2] Mental construction
[3] Action
[4] Process
[5] Object
[6] Schema

نظریه پیشرفت طرحواره - پیشرفت طرحواره‌ها به عنوان ارتباط‌هایی بین اعمال، فرایندها و اشیاء قبلی و جدید و دیگر طرحواره‌هایی که از قبل ساخته شده‌اند و یا از نو در حال ساخته شدن هستند، می‌باشد. پیشرفت آن‌ها ممکن است توسط سه مرحله که پیاژه[7] و گارسیا[8] تحت عنوان Triad، سه گانه، معرفی کرده‌اند قابل توصیف باشد. در مرحله‌ی اول، با نام Intra، اشیاء ریاضی در حال ساخته شدن هستند اما در اکثر موارد آنها نسبت به یکدیگر ایزوله باقی می‌مانند. در مرحله‌ی دوم، Inter ، شناسایی ارتباط بین فرایندها و اشیاء مختلف و انتقال بین آنها در حال شروع شدن است. مرحله‌ی آخر، Trans، زمانی است که ارتباط‌های شناسایی شده در مرحله قبل به صورت یک ساختمان از ساختارهای منسجم ظاهر شوند.

تحقیقات مرتبط. تحقیقات زیادی با استفاده از نظریه APOS و نظریه‌ی پیشرفت طرحواره پیرامون یادگیری شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله ریاضیات گسسته، جبر، جبر خطی، حساب دیفرانسیل و انتگرال و حتی ریاضیات فازی انجام شده است ([1],[7]). دامنه‌ی این تحقیقات حتی از حوزه‌ی ریاضی فراتر رفته و از این نظریه در مهندسی کامپیوتر، علوم کامپیوتر و آمار نیز استفاده شده است ([1]).

روش انجام تحقیق

شرکت کنندگان – 14 دانشجوی سال اول یکی از دانشگاه‌های دولتی خراسان رضوی که در نیمسال اول تحصیلشان در حال گذراندن واحد ریاضی عمومی 1 بودند به طور کاملا داوطلبانه در این تحقیق شرکت کردند. جلسات مصاحبه با تمام دانشجویان به طور کامل در قالب فایل‌های صوتی ضبط می‌شد.

سوال مصاحبه – نمودار تابع f را رسم کنید که تمام شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

f پیوسته باشد

$$f(0) = -3, \qquad f'(-1) = f'(1) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$$

$$f'(x) > 0 \ \ when\ x < -3 \ \ and \ \ when\ x > 1$$

$$f'(x) < 0 \ \ when -3 < x < -1 \ \ and \ -1 < x < 0 \ \ and \ \ 0 < x < 1$$

$$f''(x) > 0 \ \ when \ \ x < -1 \ \ and \ \ 0 < x < 4$$

$$f''(x) < 0 \ \ when \ \ -1 < x < 0 \ \ and \ \ x > 4$$

چارچوب نظری. برای بررسی درک دانشجویان از چارچوب نظری بیکر و همکاران ([3]) استفاده کرده‌ایم. طبق نتایج آنها پیشرفت طرحواره‌ی نموداری حساب‌دیفرانسیل و انتگرال می‌تواند توسط تعامل دو طرحواره‌ی خصوصیت[9] و طرحواره‌ی فاصله[10] توصیف شود.

پیشرفت طرحواره‌ی خصوصیت. طرحواره‌ی خصوصیت دو جنبه‌ی مهم را شامل می‌شود: 1) فهمیدن هر شرط تحلیلی (شرط‌هایی که در صورت مسئله وجود دارد) به عنوان رابطه‌ای که با یک خصوصیت نموداری تابع دارد و 2) هماهنگ کردن این شرایط با یکدیگر. شرایط شامل اطلاعات مشتق اول و دوم (آیا آنها مثبت، منفی یا صفر هستند)، حد مشتق اول و پیوستگی تابع است. این‌ها شرایط اصلی و مهم یک مسئله‌ی نموداری حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند. چارچوب Triad به کار برده شده برای این طرحواره‌ی خاص در زیر توصیف شده است.

در سطح Intra از طرحواره‌ی خصوصیت، دانشجو می‌تواند یک شرط ایزوله را تفسیر کند و آن را با یک خصوصیت نموداری از تابع مرتبط کند. یک دانشجو در این سطح به عنوان نمونه تنها شرط مشتق اول را استفاده می‌کند و اغلب اوقات از خصوصیات دیگر آگاه است اما نمی‌تواند آن‌ها را جهت تولید نمودار هماهنگ کند. اگر دو خصوصیت روی هم قرار بگیرند، دانشجو رفتار نمودار را با استفاده از تنها یک خصوصیت توصیف می‌کند. اگر او سعی در استفاده کردن بیش از یک خصوصیت داشته باشد، دانشجو نمی‌تواند توصیفش را کامل کند و نمی‌تواند استفاده کردن تنها یک خصوصیت را ترمیم کند. در سطح Inter از

[7] Piaget
[8] Garcia
[9] Property schema
[10] Interval schema

طرحواره‌ی خصوصیت، دانشجو شروع به هماهنگ کردن دو یا تعداد بیشتری شرط به طور همزمان می‌کند. این هماهنگی، به هر حال، در سراسر همه‌ی شرایط روی هم افتاده شده به کار برده نمی‌شود. دانشجو در سطح Trans از طرحواره‌ی خصوصیت در نظر گرفته می‌شود اگر او بتواند همه شرایط تحلیلی را با خصوصیات نمودار تابع روی یک بازه هماهنگ کند. در اینجا دانشجو یک انسجام از طرحواره را نشان می‌دهد به این معنا که او به طور واضح تشخیص می‌دهد چه رفتارهایی از یک تابع می توانند در نمودار وجود داشته باشند و چه رفتارهایی نمی‌توانند.

پیشرفت طرحواره‌ی فاصله. جنبه‌های مهم از طرحواره‌ی فاصله یا بازه عبارتند از فهمیدن نماد بازه، اتصال کردن فاصله های مجاور، و هماهنگ کردن فاصله‌های روی هم افتاده. تمائز قائل شدن بین بخش‌های مختلف از دامنه یک مسئله‌ی مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است. در مسئله‌ی مصاحبه، هر بازه شرایط مخصوصی را دارد و تسلط دانشجو روی فاصله‌ها جهت رسم نمودار ضروری است. Triad برای توصیف این طرحواره‌ی خاص مورد استفاده قرار گرفته است که در ادامه به توصیف آن می‌پردازیم. در سطح Intra از طرحواره‌ی فاصله، دانشجو تنها روی فاصله‌های ایزوله کار میکند. اطلاعات فاصله به فاصله توصیف میشوند. رویهم افتادگی فاصله‌ها یا اتصال فاصله‌های مجاور سبب دست پاچگی او می‌شوند. در سطح Inter ، دانشجو شروع به هماهنگ کردن دو یا تعداد بیشتری از فاصله‌های مجاور را به طور همزمان می‌کند. این هماهنگی، به هرحال، در سرتاسر همه‌ی فاصله‌های متصل اتفاق نمی‌افتد. دانشجو در سطح Trans از طرحواره‌ی خصوصیت در نظر گرفته میشود اگر قادر به هماهنگ کردن فاصله‌ها در سرتاسر دامنه باشد. او قادر خواهد بود فاصله‌ها را روی هم قرار دهد و فاصله‌های مجاور را باهم هماهنگ کند.

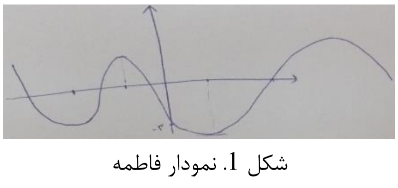
2 نتایج اصلی

در پایان مشاهده کردیم که دانشجویان مشکلات اساسی در رسم نمودار f با استفاده از شرایط داده شده در مسئله دارند. اکثر دانشجویان قادر به هماهنگ کردن شرط $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ و شرط پیوستگی نبودند. در نقطه‌ی $x = -3$ نمودار دارای یک نقطه‌ی بازگشتی[11] است که دانشجویان نمی‌توانستند این مورد را به درستی رسم کنند. بعضی دانشجویان نمودار تابع روی یک بازه را تنها با یکی از خصوصیات می‌توانستند رسم کنند، یا با استفاده از شرط مشتق اول (صعودی/نزولی) یا تنها با استفاده از شرط مشتق دوم (تقعر رو به بالا/پایین). این دانشجویان اگر می‌خواستند هر دو شرط مربوط به f' و f'' را روی یک فاصله هماهنگ کنند و نموداری رسم کنند که هر دو شرط را روی آن فاصله داشته باشد به مشکل برمی‌خوردند.

آنالیز پاسخ‌های دانشجویان. پاسخ‌های دانشجویان را براساس پیشرفتی که نسبت به هر یک از طرحواره‌های خصوصیت و فاصله داشتند دسته بندی کردیم. به علت حجم زیاد مصاحبه‌ها و محدودیت صفحات تنها دو نمونه از آن‌ها را در اینجا آورده‌ایم.

سطح Inter از طرحواره خصوصیت- سطح Trans از طرحواره‌ی فاصله: فاطمه یکی از دانشجویانی بود که در این سطح قرار داشت. او بعضی از شرط‌های روی هم افتاده شده در یک بازه را به درستی رسم می‌کرد اما بعضی از بازه‌های دامنه را تنها با استفاده از شرط مشتق دوم رسم می‌کرد و توجهی به شرایط f' روی آن بازه نداشت. در حول $x = 0$ او شرط $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ را به کلی نادیده گرفت.

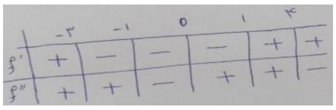
فاطمه: برای x های کوچکتر از منفی یک مشتق دوم مثبت است بنابراین تقعر f رو به بالا است، اما چگونه تابع قبل از منفی سه نزولی است (او با تعجب این مورد را بیان کرد و درنهایت بدون اینکه توجهی به صعودی و نزولی بودن تابع روی این فاصله داشته باشد تنها با استفاده از خاصیت تقعر نمودار را رسم کرد). نمودار فاطمه در شکل 1 آمده است.



شکل 1. نمودار فاطمه

[11]نقطه‌ی بازگشتی یک نقطه‌ی پیوسته روی نمودار تابع است که مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند.

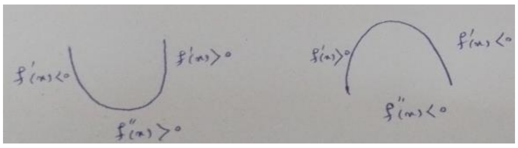
سطح Trans از طرحواره خصوصیت- سطح Trans از طرحواره‌ی فاصله: محمد تنها دانشجویی بود که در این سطح قرار داشت. او ابتدا یک جدول به منظور تعیین علامت f' و f'' رسم کرد و تمام بازه‌های دامنه را روی آن مشخص کرد. جدول محمد در شکل 2 آمده است.



		−۳		−۱		۰		۱		۴	
f'	+		−		−		−		+		+
f''	+		+		−		+		+		−

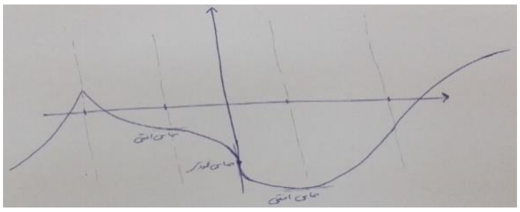
شکل 2. جدول محمد برای تعیین علامت f' و f''

او همچنین قبل از رسم نمودار نکاتی را توضیح داد. "اگر تقعر رو به بالا باشد تابع می‌تواند صعودی و یا نزولی باشد و اگر تقعر رو به پایین باشد نمودار می‌تواند صعودی یا نزولی باشد". او شکل 3 را برای تایید توضیحاتش رسم کرد.



شکل 3. نمودارهای محمد در ارتباط با f' و f''

محمد در مورد شرط $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ اینگونه توضیح داد: "خط مماس بر نمودار در $x = 0$ باید عمودی باشد تا شیب آن بی‌نهایت شود و از طرفی تابع در این فاصله باید نزولی باشد...از آنجایی که نمودار پیوسته است بنابراین در یک لحظه نمودار عمودی می‌شود". نمودار محمد در شکل 4 آمده است.



شکل 4. نمودار محمد

به علت محدودیت در تعداد صفحات این مقاله تنها قسمتی از جملاتی که دانشجویان در زمان پاسخشان بیان کرده بودند را آورده‌ایم. قابل ذکر است که محققین این تحقیق برای آنالیز پاسخ‌های دانشجویان تمام فایل‌های ضبط شده در طول مصاحبه‌ها و برگه‌های پاسخ دانشجویان را با دقت مورد بررسی قرار داده‌اند.

توصیه‌هایی به اساتید و معلمان حساب‌دیفرانسیل و انتگرال و محققین آتی. اگر چه به نظر می‌رسد دانشجویان عملکرد قابل قبولی در محاسبات جبری مشتق اول و دوم تابع f دارند اما نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که آن‌ها درک کمتری از بازنمایی‌های نموداری این مفاهیم دارند و به درستی نمی‌توانند از آن‌ها در رسم نمودار f استفاده کنند. همانطور که در بخش مقدمه‌ی این تحقیق ذکر کردیم، نتایج تحقیقات مختلف نشان می‌دهند بیشتر دانشجویان در امتحانات سنتی حساب دیفرانسیل و انتگرال که اکثرا شامل مشتق گیری از یک تابع جبری هستند، عملکرد خوبی دارند. مشکلات دانشجویان زمانی شروع می‌شود که این توابع به فرم جبری نیستند و تنها اطلاعات مسئله یک نمودار یا یک جدول از مقادیر تابع است. یکی از این دلایل می‌تواند توجه بیش از اندازه‌ی معلمین حساب‌دیفرانسیل و انتگرال و همچنین اساتید ریاضی روی بازنمایی-های جبری و توجه کمتر به بازنمایی‌های نموداری از مفهوم مشتق باشد. نتایج این تحقیق ضرورت تمرکز بیشتر اساتید روی بازنمایی‌های نموداری مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به خصوص مشتق را نشان می‌دهد. ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم برای رسیدن به درک مفهومی در بعضی تحقیقات آموزش ریاضی نیز توصیه شده است ([5]). مصاحبه‌هایی که با دانشجویان شرکت کننده در این تحقیق داشتیم نشان می‌دهند که اکثر آن‌ها نمودار f را بر اساس اطلاعات مشتق اول (صعودی/نزولی بودن) رسم می‌کنند و استفاده‌ی کمتری از مشتق دوم (تقعر) دارند. ما اساتید ریاضی عمومی ممکن است چون خودمان درک خوبی از تقعر داریم اینگونه فکر کنیم که دانشجویان هم مشکلی در این قسمت ندارند و در تدریس تمرکز کمتری روی این موضوع داشته باشیم. نمودار تابع سوال مصاحبه در $x = -1$ دارای یک نقطه‌ی بازگشتی است و اکثر دانشجویان حاضر در تحقیق ما با آن مشکل داشتند. یکی از دلایل می‌تواند این مورد باشد که آنها کمتر این نوع توابع را مشاهده کرده‌اند و اغلب توابع پیوسته و مشتق‌پذیر را دیده‌اند. یکی دیگر از موانعی که دانشجویان در سوال مصاحبه با آن مواجه می‌شدند هماهنگ کردن شرط پیوستگی و شرط $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ بود، بعضی از دانشجویان شرط مربوط به حد

مشتق اول را به کلی نادیده می‌گرفتند و بعضی دیگر از دانشجویان برای برقراری شرط مربوط به حد مشتق اول شرط پیوستگی را نادیده می‌گرفتند. برای بررسی اعتبار مدل ارائه شده در این مطالعه، محققین می‌توانند دو سوال را بررسی کنند: 1) آیا این مدل درک دانشجویان را زمانی که با مسائلی مشابه سوال مصاحبه روبرو می‌شوند نیز آدرس دهی می‌کند؟ 2) آیا گروه دیگر از دانشجویان نیز این مشکلات را در فرایند حلشان نشان می دهند؟ سوالاتی که در اینجا برای تحقیقات آتی می‌توان مطرح کرد به این صورت است که اگر از نظریه‌های دیگر برای تحلیل پاسخ‌های دانشجویان استفاده شود به چه نتایج مهم دیگری خواهیم رسید؟ نظریه‌ی پیشرفت طرحواره‌ی پیاژه و گارسیا برای بررسی فرایندهای شناختی چه مفاهیم ریاضی دیگری قابل استفاده و مفید است؟

مراجع

[1] Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Octac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., et al. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York, NY: Springer Verlag.

[2] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schingendorf, K. E. (1997). The development of students'graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431.

[3] Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 557–578.

[4] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167–192.

[5] Mallet, D. (2007). Multiple Representations for Systems of Linear Equations via the Computer Algebra System Maple. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(1), 16– 31.

[6] Sanchez, G., Fernandez, C., & Llinare, S (2015). Developing Pre-Service Teachers' Noticing Of Students' Understanding Of The Derivative Concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13: 1305Y1329

[7] Voskoglou, M. Gr. Fuzzy Logic in the APOS/ACE Instructional Treatment for Mathematics. *American Journal of Educational Research*. **2015**, 3(3), 330-339 doi: 10.12691/ education-3-3-12