Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۷-۱۰ شهریور ۱۳۹۵

ایده منظم سازی همراه با توابع پایه شعاعی برای حل معادلات ناویر- استوکس

مهدیار برفه‌یی*، احمد محمد حسنی و مصطفی رحمانزاده

دانشگاه صنعتی سیرجان، m.barfeie@gmail.com
دانشگاه صنعتی سیرجان، a.mohammadhasani@sirjantech.ac.ir
دانشگاه صنعتی سیرجان، rahmanzadeh.mostafa@gmail.com

چکیده

در این مقاله روش بدون شبکه توابع پایه شعاعی برای حل معادلات ناویر-استوکس بکارگرفته خواهد شد. ابتدا ایده منظم‌سازی برای تبدیل معادله مورد نظر به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرد، سپس روش توابع پایه شعاعی برای حل دستگاه معادلات حاصل بکارگرفته می‌شود. در انتها نتایج عددی جهت نشان دادن کارایی روش ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: معادلات ناویر-استوکس، روش‌های توابع پایه شعاعی، روش منظم سازی دنباله‌ای، روش‌های بدون شبکه.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 65M50، 65M20، 65N50، 65N40.

۱ مقدمه

توابع پایه شعاعی یک ابزار بسیارکارا برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌باشند. این روش‌ها به طورگسترده برای حل معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی بکار برده می‌شوند. دقت بالا از مرتبه نمایی و سادگی در پیاده سازی خصوصاً در ابعاد بالا از مهمترین ویژگی آنها می‌باشند [۱]. در این مقاله توابع پایه شعاعی را برای حل معادلات ناویر- استوکس به کار خواهیم برد. برای این منظور معادلات ناویر- استوکس را به عنوان یک معادله دیفرانسیل- جبری در نظر خواهیم گرفت [۲]. در حالت کلی تابع برداری

$$F(t,x,x') = 0 \tag{۱.۱}$$

یک معادله دیفرانسیل- جبری است هرگاه $\frac{\partial F}{\partial x'}$ منفرد باشد. یکی از فرم‌های معروف معادلات دیفرانسیل- جبری فرم هزنبرگ بوده و به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) - B(t)y \\ 0 &= G(t)x + r(t) \equiv g(x,t) \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

حال معادلات ناویر- استوکس به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} U_t + (U.\mathrm{grad})U &= \frac{1}{Re}\Delta U - \mathrm{grad}p + f \\ \mathrm{div}U &= 0 \\ U|_{\partial\Omega} = b \qquad & U|_{t=0} = a \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

*مسئول مکاتبات و سخنران

در اینجا Re عدد رینولدز می‌باشد و $U = [u, v]^T$ که u و v مولفه های سرعت در جهت محور x و y می باشند. با مقایسه معادلات (۲.۱) و (۳.۱) دیده می‌شود که عملگر div متناظر با ماتریس G و عملگر grad متناظر با ماتریس B است. بنابراین معادلات ناویر- استوکس از نوع معادلات دیفرانسیل جبری می‌باشد. یکی از راهکارها برای حل معادلات دیفرانسیل- جبری مشتق گرفتن از محدودیت جبری و رسیدن به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. اما مشتق گرفتن باعث بروز ناپایداری در حل این معادلات خواهد شد. یک ایده برای غلبه بر این مشکل، منظم سازی است. در روش منظم سازی معادلات به گونه‌ای فرمولبندی می‌شوند که دستگاه معادلات دیفرانسیل- جبری بدون نیاز به مشتق گیری به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در ادامه این روش را برای معادلات ناویر- استوکس بکار خواهیم برد و دستگاه معادلات بدست آمده را به کمک توابع شعاعی حل می‌کنیم.

۲ منظم‌سازی

منظم سازی، روشی را ارائه می‌دهد که بدون مشتق گرفتن از یک معادله دیفرانسیل- جبری آن را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم و با مشکل ناپایداری مواجه نشویم.

معادله دیفرانسیل- جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,t) - B(x,t)y \\ 0 &= g(x,t) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

اگر محدودیت $g(x,t) = 0$ در رابطه (۱.۲) را با شرط $\varepsilon T^{-1}(x,y)y' = g(x,t)$، و یا به طور معادل با $y' = \frac{1}{\varepsilon}T(x,y)g(x,t)$ جایگزین کنیم معادله (۱.۲) به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در اینجا ε و $T(x,y)$ به ترتیب پارامتر و ماتریس منظم‌سازی می‌باشند [۳]. پارامتر ε مقداری بسیار کوچک می‌باشد به طوری که $\varepsilon T^{-1}(x,t)y \approx 0$، بنابراین جایگزینی فوق محدودیت مسأله را برآورد می‌کند. اما مشکل منظم سازی این است که ε مقداری کوچک است و مقادیر کوچک ε باعث سخت شدن مساله می‌شوند. برای حل این مسائل لازم است تا طول گام‌های بسیار کوچک را در روشهای صریح انتخاب کنیم. برای رفع این مشکل از تکنیک پایداری بام گارت استفاده می‌کنیم. بام گارت محدودیت (۱.۲) را با محدودیت زیر برای یک معادله دیفرانسیل- جبری جایگزین کرد. [۳].

$$a_1 \frac{d}{dt} g(x,t) + a_2 g(x,t) = 0 \tag{۲.۲}$$

مقادیر a_1 و a_2 پارامترهای بام گارت نامیده می‌شوند. لازم به ذکر است در معادله (۲.۲)، $a_1, a_2 > 0$ و در نتیجه مقدار $||g(x,t)||$ به طور نمایی بر حسب زمان کاهش می‌یابد. روش بام گارت ایده مهمی برای روش منظم سازی دنباله‌ای است که می‌تواند برای معادلات دیفرانسیل- جبری و به فرم (۲.۱) مورد استفاده قرار گیرد.

۳ توابع پایه شعاعی همرا با ایده منظم سازی دنباله‌ای

در این بخش ابتدا توابع پایه شعاعی را معرفی می کنیم. سپس روش منظم سازی دنباله‌ای را برای تبدیل معادلات دیفرانسیل- جبری به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ارایه می کنیم و روش توابع پایه شعاعی را برای حل دستگاه معادلات حاصل بکار می‌بریم.

۱.۳ توابع پایه شعاعی

انواع مختلفی از توابع شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وجود دارند [۴]. یکی از معروفترین این توابع، تابع چند ربعی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(r) = \sqrt{۱ + (cr)^۲}$$

c پارامتر شکل نام دارد و بر دقت جواب اثرگذار است. فرض کنید که $\{x_j\}_{j=۱}^{j=N}$ و مقادیر تابع u_j نظیر به این نقاط در ناحیه Ω داده شده باشد. برای حل معادله به کمک توابع شعاعی، جواب در گام زمانی t_n به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{j=۱}^{N} \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|_۲)$$

برای بدست آوردن ضرایب λ_j شرایط زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u(x_i) = u_i, \quad i = ۱ \ldots N.$$

با اعمال شرط فوق ضرایب λ_j بدست می‌آیند و می توان مشتقات u را نیز تقریب زد.

۲.۳ منظم سازی دنباله‌ای

ایده اصلی روش منظم سازی دنباله‌ای این است که بجای حل یک مساله سخت، دنباله‌ای از معادلات را که از سختی کمتری برخوردارند حل می‌کند. روش منظم سازی می‌تواند به عنوان روشی کاملا صریح انجام شود. در این قسمت الگوریتم این روش را ارائه می‌کنیم که به حل معادلات دیفرانسیل- جبری می‌پردازد. روش منظم سازی بر پایه ایده‌هایی از کار بام گارت و روش‌های عددی برای بهینه سازی مسایل مقید، استوار است. این روش برای معادلات دیفرانسیل- جبری با صورت زیر است.

$$\begin{aligned} (x^{(s)})' &= g(x^{(s)},t) - B(x^{(s)},t) \times \left(y^{(s-۱)} + \frac{۱}{\varepsilon} T(x^{(s)},t)\left[a_۱ \frac{d}{dt} g(x^{(s)},t) + a_۲ g(x^{(s)},t)\right]\right) \\ y^{(s)} &= y^{(s-۱)} + \frac{۱}{\varepsilon} T(x^{(s)},t) \times \left[a_۱ \frac{d}{dt} g(x^{(s)},t) + a_۲ g(x^{(s)},t)\right] \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

$x^{(s)}$ و $y^{(s)}$، $s = ۱, ۲, \ldots, m$، دنباله‌ای از توابع هستند که به x و y همگرا می‌باشند. در صورتی که $a_۱ = ۰$، روش صریح خواهد بود. با قرار دادن $a_۱ = ۰$ و $a_۲ = ۱$ معادله (۱.۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$(x^{(s)})' = f(x^{(s)},t) - B(x^{(s)},t) \times \left(y^{(s-۱)} + \frac{۱}{\varepsilon} T(x^{(s)},t) g(x^{(s)},t)\right) \tag{۲.۳}$$

$$y^{(s)} = y^{(s-۱)} + \frac{۱}{\varepsilon} T(x^{(s)},t) g(x^{(s)},t) \tag{۳.۳}$$

الگوریتم منظم سازی دنباله‌ای

در این الگوریتم مقادیر اولیه براي x باید مشخص باشند و همان شرایط اولیه مساله مي‌باشند. یک مقدار اختیاري دلخواه براي $y^{(۰)}$ باید تعیین شود که معمولا $y^{(۰)} = ۰$ انتخاب می شود. همچنین روش تک گامی اویلر را برای حل معادلات (۲.۳) و (۳.۳) بکار خواهیم برد. در ادامه الگوریتم روش آمده است.

- در زمان $t = ۰$ قرار دهید $x^{(s)} = x^{(۱)}, s = ۱, ۲, \ldots m$. که $x^{(۱)}$ همان شرایط اولیه مساله هست. همچنین با توجه به شرایط اولیه و شرایط مرزی مشتقات $x^{(s)}$ را به کمک توابع پایه شعاعی تقریب بزنید.

- از $x^{(s)}$ و مشتقات آن استفاده کنید تا با استفاده از معادلات (۳.۳) $y^{(s)}, s = ۱,۲,...,m$ را بدست آورید.

- با استفاده از معادلات (۲.۳) جواب $x^{(s)}$ را در گام زمانی بعدی بدست آورید. سپس با استفاده از معادلات (۳.۳) ، $y^{(s)}, s = ۱,۲,...,m$ در این گام زمانی بدست آورید. مراحل را تا رسیدن به زمان نهایی ادامه دهید.

با پیاده‌سازی روش منظم سازی برای معادلات ناویر- استوکس با $a_۱ = ۰$ ، دنباله‌ای از معادلات به صورت زیر بدست می‌آیند که U نظیر به بردار x و p نظیر به متغیر جبری y است.

$$\varepsilon(U^{(s)})_t - \text{grad}(\text{div}U^{(s)}) + \varepsilon(U^{(s)} \cdot \text{grad})U^{(s)} = \varepsilon\frac{۱}{Re}\Delta U^{(s)} - \varepsilon\text{grad}p^{(s-۱)} + \varepsilon f \qquad (۴.۳)$$

$$p^{(s)} = p^{(s-۱)} - \frac{۱}{\varepsilon}\text{div}U^{(s)} \qquad (۵.۳)$$

$$U^{(s)}|_{t=۰} = a \qquad (۶.۳)$$

۴ نتایج عددی

در این قسمت روش را برای معادلات ناویر- استوکس بکار خواهیم برد. به عنوان مثال ناحیه مربعی شکلی که سیال با سرعت ثابت در قسمت پایین آن حرکت می کند، را در نظر بگیرید.

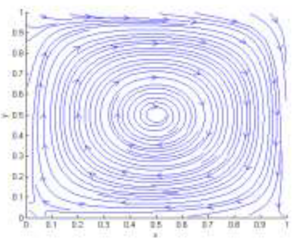
حرکت سیال در قسمت پایین، باعث ایجاد چرخش در حفره مربعی شکل می شود. سرعت و فشار در این ناحیه با معادلات ناویر استوکس بیان می‌شوند. معادلات را برای حالتی حل خواهیم کرد که جواب دقیق آن به صورت زیر است:

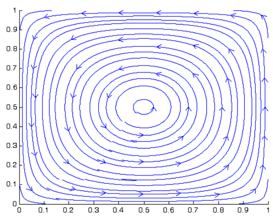
$$u = ۵۰x^۲(۱-x)^۲y(۱-y)(۱-۲y)(۱+e^{-t})$$

$$v = -۵۰y^۲(۱-y)^۲x(۱-x)(۱-۲x)(۱+e^{-t})$$

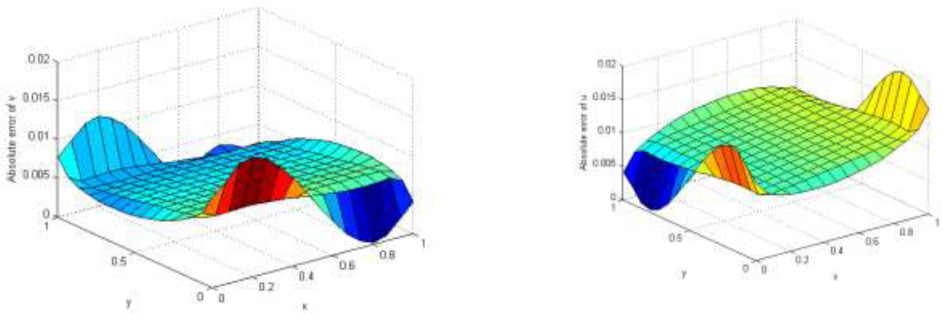
$$p = \left[-x\left(\frac{x}{۲}+۲\right) - y\left(\frac{y}{۲}-۲\right) + \frac{۱}{۳}\right](۱+e^{-t})^۲$$

برای این منظور از ۱۰۰ نقطه یکنواخت در دامنه Ω استفاده خواهیم کرد. با انتخاب $\Delta t = ۱e-۵$، $\varepsilon = ۰/۵$ و $Re = ۱۰۰$ به حل معادلات فوق می‌پردازیم. مسیرهای واقعی و تقریبی جریان برای مساله فوق در زمان $t = ۱$ در شکل‌های ۱ رسم شده است. در ادامه مقدار خطای مطلق روش در زمان $t = ۱$ در شکل‌های ۲ رسم شده است. مقایسه نتایج عددی با نتایج بدست آمده در [۵] نشان می‌دهد که روش توابع پایه شعاعی در مقایسه با روش تفاضلات متناهی با تعداد نقاط کمتر می‌تواند جواب مساله را بدست آورد.





شکل ۱: مسیر دقیق (راست) و تقریبی (چپ) خطوط جریان به ازای $Re = ۱۰۰$ در زمان $t = ۱$.



شکل ۲: خطای مطلق u (راست) و خطای مطلق v (چپ) به‌ازای $Re = ۱۰۰$ در زمان $t = ۱$.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش توابع پایه شعاعی همراه با ایده منظم سازی دنباله‌ای برای حل معادلات ناویر- استوکس بکار گرفته شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش توابع پایه شعاعی در مقایسه با روش‌های تفاضلات متناهی با تعداد نقاط کمتر در دامنه می‌تواند جواب قابل قبول مساله را بدست آورد.

مراجع

[1] Yoon, Jungho. *Spectral approximation orders of radial basis function interpolation on the Sobolev space.* SIAM journal on mathematical analysis 33, no. 4 (2001): 946-958.

[2] Ascher, Uri M., and Ping Lin. *Sequential regularization methods for higher index DAEs with constraint singularities: The linear index-2 case.* SIAM journal on numerical analysis 33, no. 5 (1996): 1921-1940.

[3] Baumgarte, Joachim. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems.* Computer methods in applied mechanics and engineering 1, no. 1 (1972): 1-16.

[4] Soheili, Ali R., Maryam Arab Ameri, and M. Barfeie. *RBFs meshless method of lines based on adaptive nodes for Burgers' equations.* Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization 5, no. 1 (2015): 49-61.

[۵] برفه‌يي مهديار، حسيني سيدمحمد. بررسي معادلات ناوير- استوكس به عنوان معادلات ديفرانسيل- جبري و حل عددي آن با روش منظم سازي دنباله‌اي، مجله علوم دانشگاه تهران،۲۵-۳۱، ۱۳۸۹.