Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۱۰-۷ شهریور ۱۳۹۵
انجمن ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی

تجزیه های تانسوری برای جداسازی کور منابع

سمیه سادات موسوی، زهرا اردولالو و عفت گلپر رابوکی *

دانشگاه قم، s.s_mosavi71@yahoo.com
دانشگاه قم ، ordolalo@chmail.ir
دانشگاه قم، g_raboky@yahoo.com

چکیده

جداسازي منابع يكي از مسائل اساسي و رو به گسترش در حوزه پردازش سيگنال است كه به مساله جداسازي سيگنال‌هاي نامعلومي كه مخلوط آن‌ها به واسطه يک ترکیب کننده نامعلوم دریافت شده می‌پردازد.جواب منحصربفرد براي اين مساله وجود ندارد و تکنیکهای مختلفی تا کنون ارایه شده است. ماتریس ها یکی از روش‌های پرکاربرد در ذخیره سازی داده‌ها و به طبع آن روش‌های خطی همچون تجزیه‌های ماتریسی به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. براي كار با داده‌هاي زياد تانسورها كه تعميم از ماتريس‌ها مي‌باشند و بدنبال آن روش‌هاي چند خطي معرفی شده‌اند. يكي از ويژگي های مهم تجزیه‌های ماتریسی و تانسوری خاصیت کاهش بعد است که آن را به ابزار مهمی در استخراج ویژگی، خوشه بندی، طبقه بندی و كاهش بعد و جداسازی منابع کور(BSS) [1] خطی و چند خطی ($MBSS$) [2] قرار می‌دهد. از مهم ترین روش ها در این زمینه می توان به آنالیز مولفه های مستقل خطی و چند خطی (ICA)، تجزیه نامنفی ماتریس و تانسور (NMF/NTF) و ... اشاره کرد. در این مقاله کاربرد تجزیه تانسورها در زمینه جداسازی کور منابع می‌پردازیم و کاربردی از آن را زمینه تفکیک سیگنال های مادر و جنین بیان می کنیم.

واژه‌های کلیدی: تانسور، تفکیک سیگنال، تجزیه تانسوری، تجزیه تاکر، تجزیه CP.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 15A69، 15A72، 15A23، 92C55.

۱ مقدمه

ریشه آنالیز چند راهی به مطالعات چندجمله ای های مشابه در قرن نوزدهم باز می گردد که توسط گاوس ،کرونکر،کیلی،ویل و هیلبرت صورت گرفت[۱] .بعد از آن تانسورها در زمینه شنوایی،پردازش ویدئو و تصاویر،یادگیری ماشین و علوم فرآیند زیستی استفاده شدند.برای اطلاع بیش تر از کاربرد تانسورها می توان به کتاب های [۱، ۴، ۳] مراجعه کرد. روش های تجزیه تانسوری مانند تاکر و CP اخیرا به عنوان ابزاری برای آنالیز داده های چند بعدی و به ویژه در زمینه تفکیک BSS چند خطی ،استخراج ویژگی،خوشه بندی و پیشگویی مورد استفاده قرار می گیرند.تانسورها ابزار قدرتمندی برای آنالیز داده های حجیم و کشف روابط و ساختارهای پنهان در آن ها بیان می کنند.

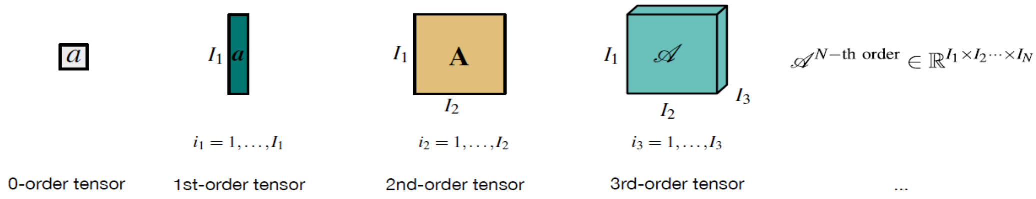
۲ مفاهیم اولیه تانسور

یک تانسور [3] یک آرایه ی چند راهی [4] یا یک ماتریس چند بعدی است. مرتبه [5] تانسور برابر با تعداد ابعاد یک تانسور است که به نام وجه ها یا راه ها نیز شناخته می شود [۱] . تانسور را می توان به صورت ریاضی زیر بیان کرد:

تعریف ۱.۲. یك تانسور $A \in \mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\ldots\times I_N}$ از مرتبه N یک آرایه ی N راهی است. اسکالر یك تانسور مرتبه صفر، بردار تانسور مرتبه یك و ماتریس تانسور مرتبه دو است. برای مثال تانسور مرتبه ۳یا آرایه ی سه راهی دارای سه وجه است(یا بعد) که در شکل زیر نشان داده شده است.

* مسئول مکاتبات و سخنران

[1] Blind Source Separation
[2] Multilinear Blind Source Separation
[3] Tensor
[4] Multi way
[5] Order



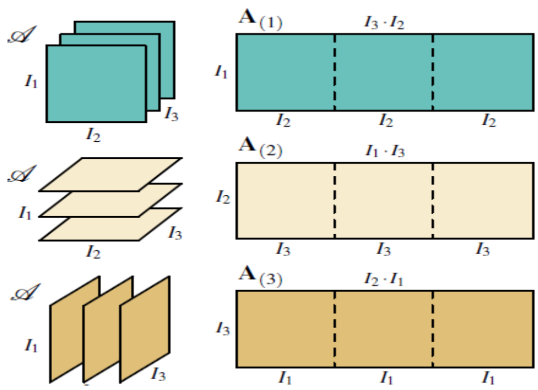
شکل ۱: آرایه ی سه بعدی

تانسور ها از بردارها و ماتریس‌ها تشکیل می شوند. یک فیبر [۱] را می توان یك بردار یا قطعه ای یک بعدی از تانسور در نظر گرفت که با ثابت نگاه داشتن همه ابعاد به جز یکی از آن ها شکل می گیرد در حالی که اسلایس [۲] یک ماتریس یا قطعه دو بعدی از یک تانسور است که با ثابت نگاه داشتن بعضی ابعاد به جز دوتای آن ها به وجود می آید [۴]. درکار با تانسورها یا به عبارتی جبر چندخطی، معمولا تانسور را به یك فرم ماتریسی تبدیل و از جبر خطی استفاده می‌کنیم. تانسور را مي‌توان نسبت به وجوه آن ماتریسی کرد. [۳]

تعریف ۲.۲. ماتریسی کردن: ماتریس شده تانسور N راهی $A \in \mathbb{R}^{I_۱\times I_۲\times\ldots\times I_N}$ نسبت به وجه n ام که با $A_{(n)}$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است که از چینش مجدد فیبرهای یك تانسور حاصل می‌شود. عنصر $(i_۱,\cdots,i_N)$ تانسور A نظیر عنصر (i_n,j) در $A_{(n)}$ است

$$j = \sum_{k=۱,k\neq n}^{N} (i_k - ۱)J_k,\ J_k = \prod_{m=۱,m\neq n}^{k-۱} I_m.$$

شکل های زیر ماتریسی کردن را برای یک تانسور سه راهی نشان می دهد:



شکل ۲: ماتریسی کردن تانسور

تعریف ۳.۲. (حاصل ضرب وجه n تانسور در ماتریس) : حاصل ضرب وجه n تانسور $A \in \mathbb{R}^{I_۱\times\ldots\times I_N}$ در ماتریس $B \in \mathbb{R}^{J\times I_n}$ به صورت $Y = A\times_n B$ نشان داده مي‌شود و با $Y_{(n)} = BA_{(n)}$ تعریف مي‌شود. در اینصورت Y یک تانسور $I_۱\times\cdots\times I_{n-۱}\times J\times I_{n+۱}\times\ldots\times I_N$ است . [۴]

۱.۰.۲ تجزیه تانسور

تانسور $A \in \mathbb{R}^{I_۱\times\cdots\times I_N}$ را به حاصل ضرب تانسور هسته $B \in \mathbb{R}^{J_۱\times\cdots\times J_N}$ در ماتریس‌های پایه $\{U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n\times J_n},\ i = ۱\cdots,N\}$ تجزیه می کند و به صورت زیر نشان داده می‌شود[۴، ۱، ۳]: .

$$A = B\times_۱ U^{(۱)}\cdots\times_N U^{(N)} = \sum_{j=۱}^{J}\sum_{r=۱}^{R}\sum_{p=۱}^{P} B_{jrp}(u_j\circ u_r\circ u_p) \qquad (۱.۲)$$

---

[۱] Fibre
[۲] Sclice
[۳] Matricization,Unfolding,Flatting

دو دسته از مهمترین تجزیه‌های تانسوری تاکر و CP می‌باشند. در تجزیه تاکر تانسور هسته پر و در CP یك تانسور قطری است. از مهمترین انواع تجزیه تاکر، تجزیه SVD چندراهی است که تجزیه $HOSVD$ نامیده میشود.

شکل ۳: تجزیه CP و تاکر

۳ مدل ماتریسی BSS

اغلب روش‌های خطی جداسازی کور منابع را می توان به عنوان یک مساله تجزیه ماتریسی مقید در نظر گرفت. فرض کنید $Y = (y_{it}) \in R^{I\times T}$ ماتریس مشاهدات ما باشد که داده شده است. [۲، ۶] در مدل BSS ما به دنبال یافتن ماتریس های $A =\in R^{I\times J}$ ، $B \in R^{T\times J}$ و $E \in R^{I\times T}$ با شرایط مورد نظر هستیم که :

$$Y = A\,B^T + E = \Sigma_{j=1}^{J} a_j\, b_j^T + E = \Sigma_{j=1}^{J} a_j \circ b_j^T + E \qquad (۱.۳)$$

$\circ$ برای نمایش ضرب داخلی به کار می رود. A را ماتریس ترکیب،B منابع ناشناخته و E خطا می‌نامند. هدف اصلی در BSS تخمین منحصر به فرد ماتریس های A و B با توجه به شرایط خاصی همچون استقلال آماری (ICA)، تنک بودن، (SCA) نامنفی بودن (NMF) یا تعامد (PCA/SVD) است. در بعضی کاربردها ماتریس داده Y به بیشتر از سه عامل تجزیه می شود برای مثال در تجزیه (SVD) شکل زیر را داریم:

$$Y = A\,D\,B^T + E = D \times_1 A \times_2 B = \Sigma_j d_{jj}\;\; a_j b_j^T \qquad (۲.۳)$$

که A و B ماتریس متعامد و D یک ماتریس قطری است که درایه های روی قطر آن مقادیر تکین Y و نامنفی می باشند. چندین مجموعه داده را می توان با ماتریس های Y_n نشان داد و هر یک از Y_n ها را جداگانه و به صورت زیر می توان تجزیه کرد:

$$Y_n = A_n\, B_n^T \qquad (۳.۳)$$

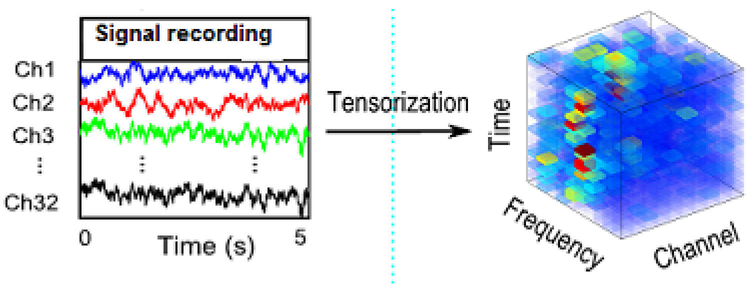
البته ممکن است در محاسبه A_n و B_n با برخی از محدودیت ها مانند مستقل بودن ستون ها و یا تنک بودن مواجه شویم که در روش هایی مانند ICA برقرار هستند. زمانی که با داده‌های زیاد سروکار داریم به سراغ روش BSS چند خطی می رویم که گسترده تر و انعطاف پذیرتر از گروه ICA است. زیرا محدودیت های مختلف ممکن است باعث شوند ماتریس های حاصل از تجزیه با یکدیگر متفاوت باشند. از طرف دیگر در دنیای واقعی مولفه های منابع پنهان به ندرت از یکدیگر مستقل هستند بنابراین اگر از روشی مانند ICA که در آن مستقل بودن یکی از شاخصه های مهم به شمار می آید استفاده کنیم ممکن است همه مولفه ها استخراج نشوند.به همین دلیل روش BSS چند راهی که علاوه بر مستقل بودن مولفه ها،شاخصه های دیگری را نیز برای آن ها معرفی می کند را در نظر می گیریم. مدل ساده خطی BSS که در بالا به معرفی آن پرداختیم را می توان برای داده های چند بعدی نیز به کار برد و با استفاده از تجزیه های تانسوری مقید آن را به یک مدل BSS چند خطی گسترش داد.

۴ مدل چند خطی BSS

فرض کنید $\underline{Y} \in R^{I_1\times I_2\times\ldots\times I_N}$ یک تانسور باشد که به کمک تجزیه تانسوری تاکر [۳] آن را به فرم زیر تجزیه کرده ایم:

$$\underline{Y} = \underline{G} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times \ldots \times_N U^{(N)} = \underline{G} \times U + \underline{E} = \widehat{\underline{Y}} + \underline{E} \qquad (۱.۴)$$

$\underline{Y}$ تانسور داده، $\underline{G}$ تانسور هسته، $U = \{U^{(i)}\}$ ماتریس‌های مولفه پنهانی، $\widehat{Y}$ تقریبی از $\underline{Y}$ و $\underline{E}$ خطای تقریب است. اگر ماتریس های فاکتور و تانسور هسته متعامد باشند مدل تاکر به عنوان تعمیمی از SVD در نظر گرفته می شود که $HOSVD$ نام دارد. [۶] اگر چه تقریب بهینه یک ماتریس از SVD بدست می آید اما تقریب بهینه یک تانسور با استفاده از تجزیه تاکر تنها یک تقریب خوب را به ما می دهد. در تجزیه تاکر ستون های ماتریس های فاکتور $U^{(n)}$ به عنوان مولفه های مورد نظر یا متغیرهای معنایی و تانسور هسته ارتباط بین مولفه ها در وجه های مختلف را نشان می دهد. در حالی که تانسور Y مجموعه ای از سیگنال های در هم یک یا دو بعدی است. [۶] روش تاکر-N با تجزیه ماتریسی را به صورت زیر می توان تخمین زد $n = ۱, ۲, ..., N$ $\quad Y_{(n)} \simeq U^{(n)}\, G_n\, Z^{(n)}$ که $Z^{(n)} = [U^{(N)} \otimes ... \otimes U^{(n+۱)} \otimes U^{(n-۱)} \otimes ... \otimes U^{(۱)}]$. به علاوه تاکر-$N$ می تواند به صورت N مدل تاکر-۱ نمایش داده شود که شامل فقط یک ماتریس فاکتور $U^{(n)}$ در هر وجه n است. ضربان قلب از مهم ترین شاخصه های سلامتی است بنابراین تعیین ضربان قلب جنین امری بسیار مهم است. [۲] یکی از آسان ترین راه ها برای انجام این کار ثبت و پردازش ضربان قلب (ECG) مادر و جنین است که با قرار دادن الکترود هایی روی سینه و شکم مادر انجام می شود [۵، ۶] . در این هنگام هر یک از سیگنال های به دست آمده آمیزه ای از سیگنال های مادر و جنین خواهد بود. ما احتیاج داریم برای آگاهی از سلامت جنین این سیگنال ها را از یکدیگر تفکیک کنیم. بنابر این به سراغ روش های BSS می رویم [۶] .در حالت چند خطی ما هر یک از این سیگنال های دریافتی که در محدوده $time - frequency$ هستند را با ترسیم $spectrogram$ به یک ماتریس تبدیل می کنیم و با کنار هم قرار دادن آن ها تانسور تشکیل می‌دهیم. به شکل زیر توجه کنید: هنگامی که تانسوری از سیگنال ها را تشکیل دادیم،می توانیم به کمک روش BSS چند خطی به محاسبه و تفکیک هر یک از این سیگنال ها



شکل ۴: تشکیل تانسوری از سیگنال ها

بپردازیم. توجه کنید که ضربان قلب جنین دامنه ی کمتری (تقریبا یک سوم ضربان قلب مادر) دارد و هم چنین میزان ضربان قلب جنین بیشتر از مادر است. این دو تفاوت در تشخیص سیگنال های مادر و جنین به ما کمک خواهند کرد.

۵ نتیجه

تانسورها از ابزارهای کارا برای ذخیره سازی و کار با داده‌های زیاد که غالبا چند ویژگی از آنها در دسترس است می‌باشند. جبر چندخطی اخیرا به طور گسترده‌ای در زمینه پردازش تصویر و سیگنال بکار می‌رود. در این راستا تجزیه‌های تانسوری که تعمیمی از تجزی‌های ماتریسی هستند مورد استفاده قرار می‌گیرند. ما در این مقاله کاربرد تجزیه‌های تانسوری را در جداسازی سیگنال‌های مخلوط مورد بررسي قرار دادیم.

مراجع

[1] Cichocki, A. Zdunek, R. l. Phan, A. H. and Amari, S. (2009) Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation , John Wiley & Sons, Ltd.

[2] Cichocki, A. (2011) Tensors decompositions: new concepts for brain data analysis? , J. Control, Measurement, and System Integration(SICE) , 7, 507-517

[3] Kolda,T. G. (2006) Multilinear Operators for Higher-Order Decompositions , Tech. Report SAND2006-2081, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Livermore, CA.

[4] Kolda, T. G. and Bader, B. W. (2009) Tensor decompositions and applications. SIAM review, 51(3), 455 500.

[5] Jasper, J. Raj Immanuel, V. Prabhu, V. Jane Christopheraj, D. Sugumar and P.T. Vanathi Journal: Procedia Engineering, 2012, Volume 30, Page 356 “Separation Of Maternal And Fetal ECG Signals From The Mixed Source Signal Using FASTICA”, springer, Volume 30, 356 (2012)

[6] Zhou, G. Zhao, Q. Zhang, Y. Adali, T. Xie, S. and Cichocki, A. (2016) Linked Component Analysis From Matrices to High-Order Tensors: Applications to Biomedical Data”, Proceedings Of The Ieee, 104 (2), 310–331, 2016.