Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۱۰-۷ شهریور ۱۳۹۵

میزان دوبخشی بودن یک گراف

مرتضی فغانی، سیامک فیروزیان و مصطفی نوری جویباری*

دانشگاه پیام نور، تهران، mo_faghan@yahoo.com
دانشگاه پیام نور، تهران، siamfirouzian@pnu.ac.ir
دانشگاه پیام نور، تهران، m_ njoybari@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بیان کمیت هایی می پردازیم که توسط آنها می توان نزدیکی یک گراف به گراف دوبخشی را اندازه گیری نمود. به طور خاص به دو کمیت $\phi(G)$ و $\psi(G)$ اشاره می کنیم که اولی کمترین تعداد یالی است که می توان از یک گراف همبند حذف نمود تا گراف دوبخشی گردد و دومی خارج قسمت شاخص سگد اصلاح شده بر شاخص سگد است.

واژه‌های کلیدی: میزان دوبخشی، گراف دوبخشی، شاخص سگد.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 05C99، 74E40.

۱ مقدمه

مساله یافتن زیر گراف های دوبخشی فراگیر از یک گراف غیر دوبخشی قدمت و تاریخچه ای طولانی دارد. اولین نتایج به وسیله اردوش و ادوارد به دست آمد، که نشان دادند هر گراف G با $|V(G)|$ راس و $|E(G)|$ یال شامل زیر گراف دوبخشی با حداقل $\frac{|V(G)|-1}{4}+\frac{|E(G)|}{2}$ یال است. هاپکینز و دیگران در [۴] کران بهتری برای گراف های فاقد مثلث مکعبی معرفی کردند، که اندازه آن $\frac{4}{5}|E(G)|$ بود. بهترین کران به دست آمده برای تعداد یال زیر گراف دوبخشی از گراف های فاقد مثلث مسطح مکعبی $\frac{39}{32}|V(G)|-\frac{9}{16}$ است که درمرجع دوم [۶] ارائه شد.

فرض کنید G گرافی همبند با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال های $E(G)$ باشد. عدد $\phi(G)$ را که به آن تقلیل دوبخشی یالی G (یا محروم سازی دوبخشی یالی) گوییم، عبارتست از کمترین تعداد یال G که با حذف آنها از G یک زیر گراف دوبخشی فراگیر به دست آید. به وضوح اگر G دوبخشی باشد آن گاه $\phi(G)=0$است. همچنین به آسانی دیده می شود که $\phi(G)\leq\frac{|E(G)|}{2}$. گراف کامل$K_n$ بیشتریم مقدار ϕ را دارد که برابر است با $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ و کمترین مقدار آن صفر است که در مورد گراف های دو بخشی است. لذا هر قدر این مقدار به صفر نزدیک شود زیر گراف فراگیر به دوبخشی نزدیک خواهد شد. در واقع $\phi(G)$، ویژگی مفیدی برای اندازه گیری از غیر دو بخشی بودن گراف داده شده، خواهد بود.

مقدار $\phi(G)$ در گراف ها به آسانی قابل محاسبه نیست و به عنوان مساله ای NP–hard مطرح می باشد. برخی از نتایج محاسبه $\phi(G)$ در گراف های فولرن در [۱] بیان شده است. در مقاله [۶] در مورد تقلیل دوبخشی یالی حاصل ضرب ها و ترکیب های دو گراف و ارتباط آنها با تقلیل دوبخشی یالی مولفه هایشان قضایایی آورده شده است. همچنین در مقاله [۶] در مورد تقلیل دوبخشی

*مسئول مکاتبات و سخنران

یالی حاصل ضرب دکارتی دو گراف، زنجیر دو گراف، پل ها و پل های تعمیم یافته دو گراف مباحثی آورده شده است. در مقاله حاضر می خواهیم به برخی از نتایج به دست آمده برای محاسبه عدد تقلیل دوبخشی یالی در گراف های فولرن اشاره کنیم و در بخش بعد کمیت $\psi(G)$ را که خارج قسمت شاخص سگد اصلاح شده بر شاخص سگد است معرفی کرده و خواهیم دید که این مقدار هر قدر به یک نزدیک شود زیر گراف به دوبخشی بودن نزدیک خواهد شد. مقدار $\psi(G)$ را برای دو دسته نامتناهی از گراف های فولرنی بیان می کنیم.

مثال ۱.۱. اگر T_n، K_n و C_n به ترتیب درخت $n-$راسی، گراف کامل $n-$راسی و دور $n-$راسی باشد آنگاه:
$\phi(T_n) = ۰$ ،$\phi(K_n) = \lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor \lceil \frac{n-۱}{۲} \rceil$ ، $\phi(C_n) = \frac{۱-(-۱)^n}{۲}$

تعریف ۲.۱. اگر G و H دو گراف باشند، گراف حاصل ضرب دکارتی $G\Box H$ گرافی با رئوس $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$ است که $(a,b)(c,d)$ یک یال در $G\Box H$ است اگر $(a = c, bd \in E(H))$ یا $(ac \in E(G), b = d)$ باشد.

گزاره ۳.۱. [۶] اگر $G_۱, ..., G_s$ گراف های همبند باشند و $G = \prod_{i=۱}^{s} G_i$ حاصل ضرب دکارتی گراف های $G_۱$ تا G_s باشد، آنگاه:

$$\phi(G) = \prod_{i=۱}^{s} |V(G_i)| \sum_{j=۱}^{s} \frac{\phi(G_j)}{|V(G_j)|}$$

گزاره ۴.۱. [۵] اگر B گرافی دوبخشی روی n راس باشد آن گاه برای هر گراف G داریم. $\phi(B\Box G) = n\phi(G)$

گزاره ۵.۱. [۶] اگر G گرافی غیردوبخشی روی n راس باشد آن گاه $\phi(G^s) = n^{s-۱}\phi(G)$.

گزاره ۶.۱. [۵] قرار دهید $G = K_n - \{e_۱, ...e_l\}$ باشد، در این صورت:

- اگر $l \leq \lfloor \frac{n+۱}{۴} \rfloor$ آنگاه $\phi(G) = \phi(K_n) - l$
- اگر $l > \lfloor \frac{n+۱}{۴} \rfloor$ آنگاه $\phi(K_n) - l \leq \phi(G) \leq \phi(K_n) - \lfloor \frac{n+۱}{۴} \rfloor$

گزاره ۷.۱. [۵] داریم $\phi(\overline{C_n}) = \lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor \lceil \frac{n-۱}{۲} \rceil - n$ که $\overline{C_n}$ متمم گراف C_n است.

۲ نتایج اصلی

در این بخش ابتدا شاخص های سگد و سگد اصلاح شده را تعریف کرده و کمیت جدیدی را که خارج قسمت شاخص سگد اصلاح شده بر شاخص سگد به نام را معرفی می کنیم و مقادیر آن را برای گراف های فولرن محاسبه می کنیم و با اندازه تقلیل دوبخشی یالی مقایسه می کنیم.

تعریف ۱.۲. اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد و $d(x,y)$ فاصله بین دو راس x و y از گراف باشد. مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$$N_u(e) = \{w \in V(G) : d(u,w) < d(v,w)\}$$

$$N_v(e) = \{w \in V(G) : d(v,w) < d(u,w)\}$$

$$N_۰(e) = \{w \in V(G) : d(u,w) = d(v,w)\}$$

همچنین قرار دهید $n_u(e)$، $n_v(e)$ و $n_0(e)$ به ترتیب تعداد رئوس مجموعه های $N_u(e)$، $N_v(e)$ و $N_0(e)$ باشد. گوتمان در سال ۱۹۹۴ شاخص سگد را برای گراف به صورت زیر تعریف کرد:

$$Sz(G) = \sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e).n_v(e)$$

راندیک در سال ۲۰۰۲ شاخص سگد اصلاح شده را به صورت زیر تعریف کرد:

$$Sz^*(G) = \sum_{e=uv\in E(G)} (n_u(e) + \frac{n_0(e)}{2}).(n_v(e) + \frac{n_0(e)}{2})$$

مثال ۲.۲. برای گراف کامل K_n و گراف دور C_n شاخص های سگد و سگد اصلاح شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Sz(C_n) = \begin{cases} \frac{n(n-1)^2}{4} & n = 2k+1 \\ \frac{n(n-2)^2}{4} & n = 2k \\ \frac{n(n-2)^2}{6} & n = 23k \end{cases}$$

$$Sz(K_n) = \frac{n(n-1)(n-2)^2}{2}$$

$$Sz^*(C_n) = \frac{n^3}{4}, Sz^*(K_n) = \frac{n^3(n-1)^3}{32}$$

قضیه ۳.۲. [۲] فرض کنید G گرافی با n راس و m یال باشد. در این صورت:

$$Sz^*(G) = \frac{mn^2}{4} - \frac{1}{4}\sum_{e=uv}(n_u(e)^2 + n_v(e)^2) + \frac{1}{2}Sz(G)$$

قضیه ۴.۲. با توجه به نتایج قضیه قبل می توان نتیجه گرفت:

$$Sz(G) \leq Sz^*(G)$$

همچنین نامساوی به تساوی تبدیل می شود اگر و تنها اگر G دو بخشی باشد.

برهان. چون $n_0(e) > 0$ پس:

$$Sz(G) \sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e).n_v(e) \leq \sum_{e=uv\in E(G)} (n_u(e) + \frac{n_0(e)}{2}).(n_v(e) + \frac{n_0(e)}{2}) = Sz^*(G)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای هر یال $e = uv$ داشته باشیم $n_0(e) = 0$. و اگر $n_0(e) > 0$ یال باید قسمتی از یک دور فرد باشد. بنابراین اگر یک گراف دو بخشی باشد، تساوی برقرار است. به عکس اگر گراف دو بخشی نباشد، آنگاه باید حداقل یک یال روی یک دور فرد موجود باشد به طوری که یک راس مخالف با یال در فاصله یکسان از u و v وجود دارد. □

تعریف ۵.۲. شاخص دو بخشی یا کمیت $\psi(G)$ رابرای گراف G به این صورت تعریف می کنیم:

$$\psi(G) = \frac{Sz^*(G)}{Sz(G)}$$

به وضوح گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر $\psi(G) = 1$.

حال مقادیر مختلف $\phi(G)$ و $\psi(G)$ را برای گراف های فولرن با $10n$ راس ارائه می کنیم. معمولا فولرن ها دوبخشی نیستند. پس برای گراف فولرن داده شده F داریم: $\phi(F) > 0$. اگر گراف فولرن فاقد پنج دور های مجاور باشد به آنها فولرن IP می گویند.

قضیه ۶.۲. [۱] اگر F گراف فولرن باشد آنگاه $\phi(G) \geq ۶$ و اگر F گراف فولرن IP باشد آنگاه $\phi(G) \geq ۱۲$.

قضیه ۷.۲. [۵] اگر $F_{۱۰n}$ گراف فولرن با $۱۰n$ راس باشد آنگاه $\phi(G) = ۶$.

حال با استفاده از محاسبه شاخص سگد و سگد اصلاح شده درگراف های فولرن با $۱۰n$ راس مقدار شاخص دوبخشی یا کمیت $\psi(G)$ را به دست می آوریم. جدول زیر مقدار محاسبه شده شاخص سگد، سگد اصلاح شده و شاخص دوبخشی یا $\psi(G)$ را درگراف های فولرن با $۱۰n$ راس مشخص می کند:

شاخص	$C_{۲۰}$	$C_{۳۰}$	$C_{۴۰}$	$C_{۵۰}$	$C_{۶۰}$	$C_{۷۰}$	$C_{۸۰}$
شاخص سگد اصلاح شده	۳۰۰۰	۱۰۰۶۵	۲۳۲۰۳	۴۳۹۰۵	۷۳۲۲۵	۱۱۲۳۲۵	۱۶۲۵۵۵
شاخص سگد	۱۹۲۰	۶۶۶۵	۱۶۸۳۰	۳۳۵۴۵	۵۸۹۰۰	۹۳۵۳۵	۱۳۸۸۱۰
شاخص دو بخشی	۱٫۵۶۲	۱٫۵۱۲	۱٫۳۷۸	۱٫۳۰۸	۱٫۲۴۳	۱٫۲۰۰	۱٫۱۷۱

مراجع

[1] T. Došlic, D. Vukicevic, Computing the bipartite edge frustration of fullerene graphs, *Dis. App. Math.* **155**(2007), 1294-1301.

[2] M. Faghani, A. R. Ashrafi, Revised and edge revised Szeged indices of graphs, *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA* **7**(2014), 153-160.

[3] M. Faghani, A. R. Ashrafi, The Topological Study of an Infinite Family of Fullerenes with 10n Carbon Atoms, *Fullerenes, Nanotubes, and Carbon Nanostructures* **21**(2013), 561-567.

[4] G. Hopkins, W. Staton, Extremal bipartite subgraphs of cubic triangle-free graphs, *J. Graph Theory* **6**(1982), 115-121.

[5] Z. Yarahmadi, A. R. Ashrafi, The bipartite edge frustration of graphs under subdivided edges andntheir related sums, *Comp. and Math. with Applications* **62**(2011), 319-325.

[6] Z. Yarahmadi, T. Došlic, A. R. Ashrafi, The bipartite edge frustration of composite graphs, *Dis. App. Math.* **158**(2010), 1551-1558.