Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۷-۱۰ شهریور ۱۳۹۵

مفهوم کارایی ارزش در تحلیل پوششی داده‌های غیرمحدب

نسیم نصرآبادی* و راضیه شجاع
دانشگاه بیرجند، nasimnasrabadi@birjand.ac.ir
دانشگاه بیرجند، rshoja2014@birjand.ac.ir

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها، ابزاری مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده با چندین ورودی و چندین خروجی می‌باشد. مفهوم کارایی ارزش یک راهکار برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده درحالتی است که تصمیم گیرنده مایل به ارائه اطلاعات خود از طریق تعیین واحد با بیش‌ترین یا کم‌ترین ارجحیت می‌باشد. در این مقاله مفهوم کارایی ارزش در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها که در آن‌ها فرض تحدب برقرار نیست مورد بررسی قرارداده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مدل FDH، کارایی ارزش، تابع ارزش، ارجحیت.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 90B50.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها [1] (DEA) که توسط چارنز و همکاران [۱] و بر مبنای ایده مطرح شده توسط فارل معرفی شد روشی برای محاسبه‌ی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد. عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی به دست آمده، نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است .

روش‌های مختلفی برای دخیل کردن اطلاعات ارجحیت در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها وجود دارد [۵]. یکی از روش‌های ارائه ارجحیت‌ها روش کارایی ارزش است که زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تصمیم‌گیرنده ارجحیت‌های خود را از طریق تعیین واحد تصمیم‌گیرنده با بیش‌ترین یا کم‌ترین ارجحیت بیان می‌کند. مفهوم کارایی ارزش برای اولین بار در مورد مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها توسط هالمه و همکاران معرفی شد[۲]. ایده اصلی این دانشمندان بر اساس تعیین واحد تصمیم‌گیرنده با بیش‌ترین ارجحیت [2] (MPS) بود که این واحد در مدل ارائه شده می‌توانست یکی از واحدهای موجود یا یک واحد مجازی انتخاب شود. اما در حالتی که به هنگام استفاده از DEA فرض تحدب حذف شود، اطلاعات ارجحیت تصمیم‌گیرنده در قالب تعیین واحد با بیش‌ترین ارجحیت یا واحد با کمترین ارجحیت یا واحدهایی با ارجحیت‌های یکسان تنها می‌تواند در مورد واحدهای موجود بیان شود. در این راستا مفهوم کارایی ارزش در مدل‌های DEA غیر محدب، یعنی مدل اساسی FDH [3] مطرح می‌شود که در این مقاله به آن می‌پردازیم.

*سخنران و مسئول مکاتبات

[1] Data Envelopment Analysis
[2] Most Preferred Solution
[3] Free Disposal Hull

این مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. ابتدا مفهوم کارایی ارزش در تحلیل پوششی داده‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد و در ادامه مدلی برای ارزیابی کارایی ارزش در حالتی که فرض تحدب در تحلیل پوششی داده‌ها برقرار نباشد ارائه می‌دهیم.

۲ مفهوم کارایی ارزش

فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیرنده [۴] (DMU) به صورت DMU_1 ، DMU_2 ،....، DMU_n داشته باشیم که هر کدام با استفاده از m ورودی، p خروجی تولید می‌کند. اگر بردارهای ورودی و خروجی متناظر با DMU_j را به ترتیب با X_j و Y_j نشان دهیم آنگاه مجموعه امکان تولید با فرض بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$P^C = \{(X,Y) \mid X \geqslant \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j X_j,\ Y \leq \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j Y_j,\ \lambda \in \Lambda^C\}, \tag{۱.۲}$$

که در آن

$$\Lambda^C = \{\lambda \mid \lambda_j \geqslant ۰,\ \ j = ۱,۲,\dots,n\}. \tag{۲.۲}$$

در حالتی که فرض بازده به مقیاس ثابت برقرار نباشد به جای Λ^C، باید مجموعه مناسب دیگری قرار داده شود. برای اختصار بردار $(-X_j, Y_j)$ را با Z_j نشان می‌دهیم و آن را بردار فعالیت متناظر با DMU_j می‌نامیم. فرض می‌شود که تصمیم‌گیرنده ارجحیت‌های خود را در مورد واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس تابع $V : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}$ که تابع ارزش نامیده می‌شود بیان می‌کند. تابع ارزش اصولاً تابعی ناشناخته است، اما به‌طور کلی دارای این ویژگی است که تابع صعودی است و جواب با بیش‌ترین ارجحیت را به بیش‌ترین مقدار می‌برد. به عبارت دیگر این تابع حداکثر مقدار خود را در جواب با بیش‌ترین ارجحیت اختیار می‌کند. همچنین در اینجا فرض می‌کنیم تابع ارزش یک تابع مقعر کاذب است. با فرض اینکه $(X^*, Y^*) \in P^C$ جواب با بیش‌ترین ارجحیت تصمیم‌گیرنده باشد که

$$X^* = \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^* X_j, \quad Y^* = \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^* Y_j, \quad \lambda_j^* \geqslant ۰ \quad j = ۱,۲,\dots,n, \tag{۳.۲}$$

و با نمادگذاری $J^\lambda = \{j \mid \lambda_j^* = ۰\}$ ، مدل کارایی ارزش اصلی برای ارزیابی کارایی ارزش DMU_o با فرض بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود [۲] :

$$\begin{array}{lr} \max & z = \sigma + \epsilon(۱^T S^+ + ۱^T S^-) \\ s.t. & \\ & Y\lambda - \sigma\omega^y - S^+ = Y_o, \\ & X\lambda + \sigma\omega^x + S^- = X_o, \\ & S^- \geqslant ۰, S^+ \geqslant ۰, \\ & \lambda_j \geqslant ۰, \quad j \in J^\lambda \end{array} \tag{۴.۲}$$

که در آن $۰ < \epsilon$ غیر ارشمیدسی است و $\omega = (\omega^x, \omega^y)$ یک بردار نامنفی است که ماهیت مدل را مشخص می‌کند. اگر z^* مقدار بهینه تابع هدف مدل (۴.۲) باشد، آنگاه امتیاز کارایی ارزش DMU_o برابر $\frac{۱}{۱+z^*}$ تعریف می‌شود.

دربخش بعدی مفهوم کارایی ارزش در مدل FDH که در آن فرض تحدب مجموعه امکان تولید حذف گردیده است توسعه داده می‌شود.

[۴] Decision Maker Unit

۳ کارایی ارزش در مدل FDH

در مدل FDH مجموعه امکان تولید به صورت

$$PPS = \{(X,Y) \mid X \geqslant \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j,\ Y \leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j,\ \lambda_j \in \{0,1\},\ j=1,2,\ldots,n\}, \qquad (۱.۳)$$

تعریف می‌شود. مفهوم کارایی ارزش در مدل FDH برای اولین بار توسط هالمه و همکاران با فرض‌های زیر مورد بررسی قرار گرفته است [۳] :

۱. تابع ارزش تصمیم‌گیرنده شبه مقعر و صعودی است که مقدار بیشینه خود را در جواب با بیش‌ترین ارجحیت اختیار می‌کند.

۲. تصمیم‌گیرنده ارجحیت‌های خود را از طریق تعیین واحد تصمیم‌گیرنده با کمترین ارجحیت در بین تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده بیان می‌کند.

با ملاحظات فوق مدل کارایی ارزش با استفاده از مفهوم مخروط‌های محدب [۴] توسعه داده شده است. در اینجا فرض می‌کنیم که ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده از طریق ارائه واحد با بیش‌ترین ارجحیت در بین تمامی واحدهای موجود بیان می‌شود. فرض می‌کنیم کهDMU_l واحد با بیش‌ترین ارجحیت باشد به عبارتی داشته باشیم

$$DMU_l \succ DMU_j, \quad j=1,2,\ldots n, \quad j \neq l. \qquad (۲.۳)$$

بنابراین با استفاده از مفهوم مخروط‌های محدب می‌توان به تعداد $n-1$ مخروط دونقطه‌ای به صورت

$$C_j = C(Z_j, Z_l; Z_j) = \{Z \mid Z = Z_j + \mu_j(Z_j - Z_l);\ \mu_j \geqslant 0\}, \quad j=1,2,\ldots,n,\ j\neq l, \qquad (۳.۳)$$

تشکیل داد. بر طبق ویژگی‌های مخروط‌های محدب برای محاسبه کارایی ارزش DMU_o نسبت به مخروط C_j باید مساله برنامه‌ریزی خطی زیر حل شود:

$$\begin{array}{ll} \gamma_j = \max & \sigma + \epsilon 1^T S \\ \quad s.t. & \\ & Z_j + \mu_j(Z_j - Z_l) - \sigma\omega - S = Z_o \\ & \mu_j \geqslant 0,\ S \geqslant 0, \end{array} \qquad (۴.۳)$$

که در آن بردار نامنفی $\omega = (\omega^x, \omega^y)$ مشخص‌کننده ماهیت مدل است و $\epsilon > 0$ عدد مثبت به قدر کافی کوچک اختیار می‌شود. با نمادگذاری معرفی شده در بخش قبلی مدل (۴.۳) را می‌توان به صورت

$$\begin{array}{lll} \gamma_j = \max & \sigma + \epsilon(\sum_{r=1}^{p} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^-) & \\ \quad s.t. & & \\ & y_{rj} + \mu_j(y_{rj} - y_{rl}) - \sigma\omega_r^y - s_r^+ = y_{ro} & r=1,2,\ldots,p \\ & x_{ij} + \mu_j(x_{ij} - x_{il}) + \sigma\omega_i^x + s_i^- = x_{io} & i=1,2,\ldots,m \\ & s_r^+ \geqslant 0 & r=1,2,\ldots p \\ & s_i^- \geqslant 0 & i=1,2,\ldots m \\ & \mu_j \geqslant 0 & j=1,2,\ldots n \end{array} \qquad (۵.۳)$$

نوشت.

اگر γ_j مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق باشد مقدار $\frac{1}{1+\gamma_j}$ کارایی ارزش DMU_o را نسبت به مخروط C_j نشان می‌دهد. برای محاسبه کارایی ارزش سراسری DMU_o ، مساله (۵.۳) را برای تمام مخروط‌های دونقطه‌ای C_j برای $j=1,2,\ldots n$ و $j \neq l$ حل می‌کنیم. در این صورت اگر قرار دهیم

$$\gamma = \max\{\gamma_j : j=1,2,\ldots n,\ j\neq l\}, \qquad (۶.۳)$$

آنگاه مقدار $\frac{۱}{۱+\gamma}$ امتیاز کارایی ارزش سراسری DMU_o را مشخص می‌کند.

نکته ۱.۳. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی صفر و یک می‌توان مدل (۴.۳) را پس از حذف جمله‌ی دوم در تابع هدف و به ازای تمامی j هایی که $j = ۱, ۲, \ldots n,\ \ j \neq l$ در مدل زیر ادغام نمود:

$$
\begin{aligned}
\gamma^* = \max \quad & \sigma \\
s.t. \quad & Z_j + \mu_j(Z_j - Z_l) - \sigma\omega_j + Mt_j \geqslant Z_o \\
& \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq l}}^{n} t_j = n - ۱,\ t_j \in \{۰, ۱\},\ j = ۱, ۲, \ldots, n,\ j \neq l,
\end{aligned}
\tag{۷.۳}
$$

که در آن M عدد مثبت به قدر کافی بزرگ اختیار می‌شود. اگر γ^* مقدار بهینه مساله فوق باشد مقدار $\frac{۱}{۱+\gamma_j}$ امتیاز کارایی ارزش سراسری DMU_o را مشخص می‌کند.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله روش ارائه شده در [۳] را برای حالتی که تصمیم‌گیرنده یکی از واحدهای موجود را به عنوان جواب با بیش‌ترین ارجحیت تعیین می‌کند، اصلاح کرده و یک مدل برنامه‌ریزی صفر و یک برای ارزیابی کارایی ارزش ارائه داده است.
مدل ارائه شده برای بسیاری از کاربردهای جهان واقعی مانند ارزیابی دانشگاه‌ها (دانشکده‌ها)، ارزیابی عملکرد بانک و سایر واحدهای تصمیم‌گیری قابل اجراست.

مراجع

[1] A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, Measuring efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research,* **2(6)**(1978), 429-44.

[2] M. Halme, T. Joro, P. Korhonen, S. Salo and J. Wallenius, A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis, *Management Science,* **45(1)**(1999), 103-15.

[3] M. Halme, P. Korhonen and J. Eskelinen, Non-convex value efficiency analysis and its application to bank branch sales evaluation, *Omega*, **48** (2014), 10-18.

[4] P. Korhonen, J. Wallenius and S. Zionts, Solving the discrete multiple criteria problem using convex cones, *Management Science,* **30(11)**(1984), 1336-45.

[5] T. Joro and P. Korhonen, *Extension of data envelopment analysis with preference information,* Springer, 2014.