Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۷-۱۰ شهریور ۱۳۹۵

الگوریتم جدید برای مساله پوشش ۳-مسیر

محمد ابراهیم نژادیان و مریم طهماسبی*

دانشگاه شهید بهشتی، muhammad.ebrahimnezhadian@gmail.com
دانشگاه شهید بهشتی، m_tahmasbi@sbu.ac.ir

چکیده

در مساله پوشش k مسیر، هدف تعیین مجموعه ای از راسها است به طوری که هر مسیر با طول Kحداقل یک راس در این مجموعه داشته باشد. در حالتی که $K = ۲$ باشد، مساله، به مساله پوشش تبدیل می شود. این مساله مانند مساله پوشش، Np تام است. ما در این مقاله الگوریتمی ابتکاری با مرتبه زمانی $O(n^۳)$ برای مساله ۳-پوشش ارائه میدهیم که برای هر گراف داده شده، یک ۳-پوشش با اندازه کوچک تعیین می کند.

واژه‌های کلیدی: پوشش رأسی، الگوریتم های تقریبی، الگوریتم های ابتکاری.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2016): 05D85.

۱ مقدمه

در این مقاله ما فقط گراف های ساده، متناهی و بدون جهت را در نظر می گیریم. برای گراف G، مجموعه رأس ها را با $V(G)$، تعداد رأس ها را با $n = |V(G)|$ و مجموعه یال ها را با $E(G)$، تعداد یال ها را با $m = |E(G)|$ نشان می دهیم. P_t مسیری با طول t رأس است. با داشتن گراف G و عدد مثبت $t \geq ۲$ زیر مجموعه F از رأس های گراف را P_t-پوشش رأسی (VCP_t)نامیده می شود اگر هر مسیر با طول t حداقل یکی از رأس هایش عضو F باشد. مجموعه P_t-پوشش رأسی با اندازه مینیمم را با $\psi_t(G)$ نشان می دهند.در مسأله VCP_t هدف پیدا کردن پوششی با اندازه مینیمم می باشد. مساله VCP_t برای هر $t \geq ۲$ یک مسأله NP-کامل می باشد[۵] در حالت کلی مساله $VCP_۲$ به عنوان مساله پوشش رأسی شناخته شده و مساله VCP_t تعمیم یافته آن در نظر گرفته می شود. مساله $VCP_۳$ کاربرد های زیادی در زندگی و علوم دارد اما یکی از کاربردهای که مطالعه آن را با انگیزه تر می سازد: طراحی پروتکل های امن برای ارتباط در شبکه های حسگر بیسیم است[۱]. در این مقاله توجه ما به مساله $VCP_۳$ معطوف است. در متون، مساله $VCP_۳$ با عنوان مساله $Bounded - Degree - one\ Deleeion(۱ - BDD)$ شناخته شده است. با داشتن گراف $G(V, E)$ در مساله $(۱ - BDD)$ هدف پیدا کردن مجموعه مینیمم F از رأس ها است به طوری که حداکثر درجه گراف $G[V/F]$ یک باشد. برای مساله $VCP_۳$، کاردوس و همکاران یک الگوریتم دقیق با زمان اجرای $۱/۵۱۷۱^n.n^{O(۱)}$ و یک الگوریتم تقریبی تصادفی با ضریب تقریب ۲۳/۱۱ ارایه داده اند همچنین کران بالا $\psi_۳(G) \preceq (۲n + m)/۶$ به دست آوردند [۴]. چنگ و همکاران یک الگوریتم دقیق بهبود یافته با زمان اجرای $۱/۴۶۸۵^n.n^{O(۱)}$ ارایه داده است [۲]. برای ورژن وزن دار $VCP_۳$، جیانهو و ونلی دو الگوریتم ۲-تقریب با استفاده از روش دوگان اولیه و روش نسبت محلی ارایه داده اند[۶].
وو یک الگوریتم پارامتری بهبود داده شده با زمان اجرای $۱/۸۸۲^k.n^{O(۱)}$ با استفاده از روش تسخیر و غلبه $(Measure \,\&\, Conquer)$ داده است [۷].

*سخنران و مسئول مکاتبات

۲ الگوریتم پیشنهادی

با توجه به این که مسأله ۳- پوشش رأسی در گراف یک مساله NP–کامل است نباید انتظار داشت که الگوریتم های دقیق برای آن، روی گراف های بزرگ در زمان معقولی پوشش مینیمم را به دست آورند. لذا در عمل بیشتر الگوریتم های ابتکاری با خطای معقول و زمان اجرای بسیار کم مورد توجه هستند. الگوریتم پیشنهادی تنها الگوریتم ابتکاری موجود برای مساله ۳-پوشش رأسی می باشد که برای تمام گراف ها کار می کند. مرتبه آن $O(n^3)$ و زمان اجرای آن برای گراف های بزرگ خیلی کم می باشد.

به طور شهودی ایده الگوریتم این است که برای انتخاب رأس ها، به یال ها جمع درجه رأس های آنها را به عنوان وزن آنها در نظر می گیرد و سعی می کند تا جایی که ممکن است کوچکترین مجموعه پوششی مینیمال را پیدا کند. برای این کار رأس های پوششی را دور از هم انتخاب می کند. چون طبق تعریف هر مسیر با طول ۳ باید حداکثر یکی از رأس هایش پوششی باشد. پس هر رأس پوششی، در هر مسیری حداکثر می تواند دو رأس با رأس پوششی دیگر فاصله داشته باشد. برای ایجاد این ویژگی هر بار یالی که کمترین وزن را دارد در نظر گرفته و رأس هایش را غیر پوششی در نظر می گیرد، سپس همسایه هایش را طبق شرایط گفته شده در الگوریتم، به مجموعه پوششی اضافه می کنیم. با این کار تا جایی که ممکن است از مجاور بودن رأس های پوششی جلوگیری می شود و به صورت یکنواختی از همه قسمت های گراف انتخاب می شوند. همچنین چون در هر مرحله یال با کمترین وزن در نظر گرفته می شود، کمترین رأس ممکن به مجموعه پوششی اضافه می شود و این باعث می شود پوشش مینیمال کوچکتری به دست آید.

۱.۲ الگوریتم پیشنهادی

شبه کد الگوریتم پیشنهادی

۱- مجموعه پوششی را تهی قرار بده

۲- برای هر رأس، درجه آن را محاسبه کن.

۳- برای هر یال $e = (u, v)$ جمع درجه رأس‌های u و v را به عنوان وزن آن یال در نظر بگیر.

۴- تا زمانی که یالی وجود دارد که وزن آن بزرگتر از ۲ است عملیات پایین را ادامه بده:

۵- یال با مینیمم وزن را پیدا کن و آن را e_{min} قرار بده.

۶-برای تمام رأس های همسایه یال e_{min} عملیات زیر را انجام بده.

۷- اگر درجه رأس های یال با وزن e_{min} کمتر مساوی درجه همسایه هایشان بود، آنگاه همسایه با بیشترین درجه e_{min} را به مجموعه پوششی اضافه کن.

۸- یال های مجاور رأس انتخابی را از گراف حذف کن.

۹- درجه رأس و یال ها را به روز کن.

۱۰- به مرحله ۴ برگرد.

۱۱-در غیر این صورت رأسی از یال e_{min} را که درجه آن از درجه همسایه هایش بزرگتر است به مجموعه پوشش رأسی اضافه کن.

۱۲- یال های مجاور رأس انتخابی را از گراف حذف کن.

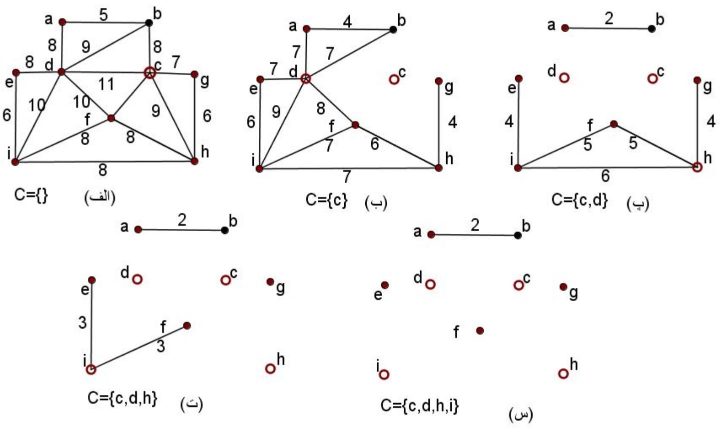
۱۳- درجه رأس و یال ها را به روز کن.

۱۴- به مرحله ۴ برگرد.

۱۵- مجموعه پوششی را چاپ کن.

۲.۲ اجرای الگوریتم روی یک مثال

در این قسمت الگوریتم را روی یک گراف دلخواه اجرا می کنیم. در شکل یک گراف داده شده که وزن یال ها روی آنها نشان شده است. در قسمت (الف) یال با کمترین وزن، یال ab می باشد که درجه a و b از درجه همسایه هایشان بزرگتر نیست پس رأس همسایه با بزرگترین درجه آنها یعنی c، را به مجموعه پوشش رأسی اضافه می کنیم(در شرایط تساوی یکی را به تصادف انتخاب می کنیم). یال های مجاور رأس c را از گراف حذف می کنیم و وزن یال ها به روز می شود. در قسمت (ب) همسایه دیگر یال ab یعنی d به مجموعه پوششی اضافه می شود سپس مثل قسمت (الف) گراف به روز می شود. در قسمت (پ) یال ab همسایه ای ندارد پس دوباره یال با کمترین وزن را در نظر می گیریم (gh یا ei). یال gh در نظر گرفته می شود. چون درجه h از درجه یکی از همسایه هایش بزرگتر است پس رأس h به مجموعه پوششی اضافه می شود. دوباره یال با کمترین وزن در نظر گرفته می شود. یال ei و fi هر کدام که در نظر گرفته شود رأس i به مجموعه پوششی اضافه می شود و گراف به روز می شود. در این مرحله چون وزن همه یال ها کمتر مساوی ۲ می باشد الگوریتم پایان می یابد و مجموعه $C = \{c, d, h, i\}$ را به عنوان مجموعه ۳-پوششی گراف به دست می آورد.



شکل ۱: اجرای الگوریتم پیشنهادی روی یک مثال

۳ اثبات درستی و پیچیدگی الگوریتم پیشنهادی

۱.۳ درستی الگوریتم

الگوریتم هر بار یک یال را در نظر گرفت یا همه همسایه های آن را به مجموعه پوششی اضافه می کند و یا یکی از رأس های آن را به مجموعه پوششی اضافه می کند که در هر دو حالت برای هر مسیر با طول ۳ از گراف حداقل یکی از رأس هایش به مجموعه پوشش اضافه می شود. پس جوابی که الگوریتم به دست می آورد لزوما ۳-پوشش رأسی است.

۲.۳ پیچیدگی الگوریتم

خط های ۱ و ۲ زمان ثابت و خط ۳ زمان $O(n^۲)$ لازم دارد. در خط ۴، حلقه حداکثر به اندازه تعداد یال ها اجرا می شود. پیدا کردن یال با وزن مینیمم در خط ۵ زمان $O(n)$ می برد. قسمت if و $else$ هر کدام به زمان $O(n)$ نیاز دارد. در نهایت خط ۱۱ و

۱۲ و ۱۳ زمان $O(n)$ می برند. پس پیچیدگی الگوریتم $O(n^3)$ می باشد.

۴ نتیجه گیری

الگوریتم پیشنهادی اولین الگوریتم ابتکاری برای مساله ۳-پوشش رأسی می باشد که روی همه گراف ها کار می کند. ایده این الگوریتم، تعمیمی از ایده الگوریتم پوشش است که در [۳] مطرح شد. آن الگوریتم برای سه دسته گراف نمونه اجرا شد و در بسیاری از موارد، نتتجه مشابه را با زمان بهتر، نسبت به الگوریتمهای موجود، به دست آورد. باتوجه به این که مساله ۳- پوشش سابقه مطالعاتی کمتری دارد، هنوز الگوریتمهای ابتکاری که آن را روی گرافهای نمونه اجرا کنند، طراحی و اجرا نشده اند، ما در ادامه کار، این الگوریتم را روی دسته هایی ازگرافها که جواب بهینه آنها موجود است، اجراونتایج را با جواب بهینه مقایسه می کنیم در آینده می خواهیم الگوریتم را بهبود داده و همچنین آن را روی گراف های بنچ مارک اجرا کنیم.

مراجع

[1] B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič, G. Semanišin, Minimum k-path vertex cover, *Discrete Applied Mathematics* , (2011)**159(12)** , 1189-1195.

[2] M.S. Chang, L.H. Chen, L.J. Hung, Y.Z. Liu, P. Rossmanith, S. Sikdar, An $O(1.4658n)$- time exact algorithm for the maximum bounded-degree-1 set problem,*In: Proceedings of the 31st Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory* , 2014, pp. 9–18.

[3] M.Ebrahim nezhadian, Review algorithms of vertex cover problem in graph, Master thesis, Shahid Beheshti University (2015).

[4] F. Kardoš, J. Katrenič, I. Schiermeyer, On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs.*Theoretical Computer Science* . 2011 Nov 25; **412(50)**:7009-17.

[5] J.M. Lewis, M. Yannakakis, The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete,*Journal of Computer and System Sciences* **20.2** (1980): 219-230

[6] J.H. Tu, W.L. Zhou, A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover P3 problem, *Information Processing Letters* 111. **14** (2011): 683-686.

[7] B.Y. Wu, A Measure and Conquer Approach for the Parameterized Bounded Degree-One Vertex Deletion, COCOON 2015, 469–480 2015.