



پیچیدگی یک مسئله‌ی پوشش‌های هندسی نادقیق

ابوالفضل پورعیدی* و محمد فرشی†

آزمایشگاه الگوریتم‌های ترکیبیاتی و هندسی، دانشگاه یزد
mfarshi@yazd.ac.ir, poureidi@stu.yazd.ac.ir

چکیده

یک t -پوشش هندسی ($t > 1$) برای یک مجموعه نقطه در صفحه، گراف هم‌بند G است؛ به طوری که فاصله‌ی بین هر جفت از راس‌ها در G ، حداکثر t برابر فاصله‌ی اقلیدسی بین آن‌هاست. کوچک‌ترین t به طوری که گراف یک t -پوشش است را تاخیر گراف گویند. یک مجموعه نقطه نادقیق D ، با دیسک‌هایی دوه‌دو جدا از هم در صفحه مدل می‌شود. اگر از هر دیسک D یک نقطه انتخاب شود؛ آن‌گاه مجموعه‌ی حاصل یک نمونه‌ی دقیق از D است. گراف $G = (D, E)$ برای مجموعه نقطه نادقیق D ، یک گراف هندسی نادقیق است؛ که E یک مجموعه از جفت دیسک‌های نامرتب در D است. برای نمونه‌ی دقیق S از D ، گراف $G_S = (S, E_S)$ نمونه‌ی دقیق G متناظر با S است؛ که مجموعه یال‌های E متناظر با S است. در این‌جا نشان می‌دهیم که برای یک گراف نادقیق یافتن یک نمونه‌ی دقیق مسطح با کم‌ترین تاخیر NP-سخت است.

واژه‌های کلیدی: شبکه‌ی هندسی، t -پوشش، نقطه‌های نادقیق، NP-سخت.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 65D18, 68U05.

۱ مقدمه

یک شبکه‌ی هندسی یک گراف بدون جهت وزن‌دار است که راس‌ها نقطه‌هایی در صفحه هستند و هر یال، یک پاره‌خط مستقیم‌الخط با وزنی برابر با فاصله‌ی اقلیدسی بین دو انتهایش است. فرض کنید P شامل n نقطه است. در شبکه‌ی هندسی $G = (P, E)$ برای $u, v \in P$ ، فاصله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین u و v در G را با $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم. تاخیر (یا ضریب کشش) بین u و v در G با $\delta_{G(u,v)} = d_G(u, v) / |uv|$ تعریف می‌شود که $|uv|$ فاصله‌ی اقلیدسی بین u و v است و هم‌چنین تاخیر G با $\delta(G) = \max\{\delta_{G(u,v)} \mid \forall u, v \in P, u \neq v\}$ تعریف می‌شود. گراف G یک t -پوشش روی P است؛ هرگاه برای هر $u, v \in P$ داشته باشیم $\delta_{G(u,v)} \leq t$. هر مسیری که این شرط را دارد یک t -مسیر بین u و v در G نامیده می‌شود. چند معیار از قبیل کم بودن تعداد یال‌ها، پایین بودن وزن گراف، و کم بودن بیش‌ترین درجه‌ی راس علاوه بر ضریب کشش در پوشش‌های هندسی بررسی شده‌اند [۲].

هر مجموعه $D = \{D_1, \dots, D_n\}$ با n دیسک دوه‌دو جدا از هم در صفحه، یک مجموعه نقطه‌ی نادقیق است. یک نمونه دقیق از D ، مجموعه $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ است؛ که $p_i \in D_i$ برای هر $i = 1, \dots, n$. فرض کنید E یک مجموعه از جفت‌های نامرتب از دیسک‌های D است. گراف $G = (D, E)$ یک گراف هندسی نادقیق است. برای $G = (D, E)$ ، برای هر نمونه دقیق

* سخنران
† مسئول مکاتبات

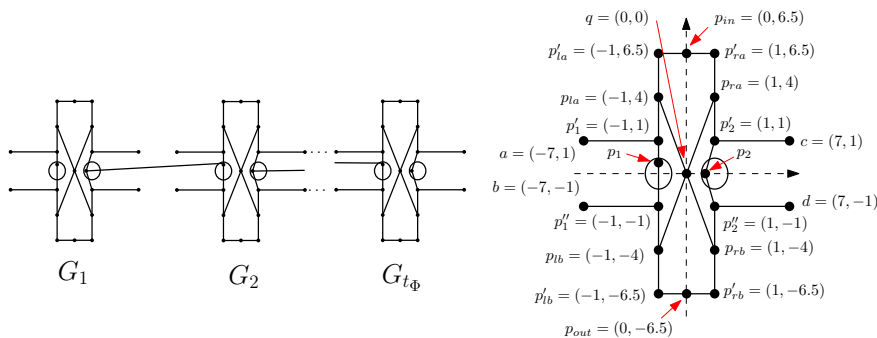
S از D ، یک نمونه دقیق از G متناظر با S گراف $G'_{\{G,S\}} = (S, E_S)$ است که $E_S = \{(p_i, p_j) | (D_i, D_j) \in E\}$. گراف نادقیق G را یک t -پوشش نادقیق گوئیم هرگاه برای هر نمونه‌ی دقیق S از D یک t -پوشش باشد. آباء و همکارانش [۳] مسئله‌ی یافتن یک پوشش هندسی را برای دیسک‌های در صفحه بررسی کردند. (توجه کنید که اگر دو دیسک با هم اشتراک داشته باشند آنگاه باید یک یال بین دو دیسک در پوشش قرار داد که در نتیجه تعداد یال‌های پوشش وابسته به تعداد دیسک‌هایی است که با هم اشتراک دارند.) وجود یک مسیر کوتاه بین هر دو راس شبکه یک معیار برای خوب بودن شبکه است. بنابراین، محاسبه‌ی یک نمونه‌ی دقیق یک گراف نادقیق منجر به مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر می‌شود:

مسئله ۱.۱. برای $1 < \delta \leq t$ و گراف نادقیق G با حداکثر m یال روی D ، یک نمونه‌ی دقیق S برای D محاسبه کنید به طوری که $G'_{\{G,S\}}$ یک گراف مسطح با حداکثر تاخیر δ باشد.

در این جا، با استفاده از یک تبدیل از مسئله‌ی 3SAT (یک مسئله‌ی NP-کامل [۱]) نشان می‌دهیم که این مسئله NP-سخت است. در گذشته، کلین و کوتز [۵] نشان دادند که برای مجموعه‌ی نقطه‌ی S در صفحه و مقادیر t و m ، محاسبه‌ی یک t -پوشش هندسی مسطح با حداکثر m یال روی S مسئله‌ی NP-سخت است. چونگ و همکارانش NP-سخت بودن یافتن یک درخت با کوچک‌ترین تاخیر برای یک مجموعه نقطه در صفحه را نشان دادند [۴].

۲ نتایج اصلی

گراف نادقیق $G = (D, E)$ را در نظر بگیرید که D شامل دو دیسک D_1 و D_2 با شعاع $r = 0.45$ و به ترتیب به مرکزهای $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ و شامل ۱۹ نقطه‌ی مجموعه‌ی $\{q, p'_1, p''_1, p'_2, p''_2, p_{ra}, p'_{ra}, p_{la}, p'_{la}, p_{rb}, p'_{rb}, p_{lb}, p'_{lb}, p_{in}, p_{out}, a, b, c, d\}$ است. گراف G با مختصات راس‌هایش در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱: گراف‌های نادقیق G_x و G .

با بررسی طول کوتاه‌ترین مسیرها بین هر جفت u و v از G یعنی $d_{G_S}(u, v)$ و از آن جایی که $|uv| \geq 1 - r = 0.55$ مقدار ثابت c وجود دارد که G یک c -پوشش نادقیق است. توجه کنید که کم‌ترین تاخیر G بین q و یکی از $p_1 = (r - 1, 0)$ یا $p_2 = (1 - r, 0)$ روی می‌دهد که حداقل ۱۵ است. بنابراین فرض می‌کنیم $c \geq 15$. به آسانی دیده می‌شود که گراف G یک c -پوشش نادقیق است.

لم ۱.۲. اگر G_S یک نمونه‌ی دقیق برای G یک γ -پوشش باشد؛ آنگاه یا $p_1 = (-1, y_1)$ و $p_2 = (1, y_2)$ است یا $p_1 = (-1, y_2)$ و $p_2 = (1, y_1)$ است، که $y_1 \in (0.44, r]$ ، $y_2 \in [-r, -0.44]$ ، $y_3 \in [-r, -0.44]$ و $y_4 \in (0.44, r]$ است. برهان. اگر p_1 (یا p_2) روی قطر عمودی دیسک D_1 (یا D_2) نباشد؛ آنگاه یک γ -مسیر بین a و b (یا c و d) در G_S وجود ندارد.

اگر p_1 روی قطر عمودی D_1 از مرکز به طرف هر کدام از دو انتهایش حرکت کند، تاخیر بین q و p_1 در G_S کاهش می‌یابد؛ زیرا $d_{G_S}(q, p_1)$ کاهش و $|qp_1|$ افزایش می‌یابد. اگر p_1 برابر با $(-1, 0.44)$ یا $(-1, -0.44)$ باشد با یک محاسبه داریم $d_{G_S}(q, p_1) > \sqrt{|qp_1|}$. بنابراین، اگر $p_1 = (-1, y_1)$ که $y_1 \notin [-0.44, 0.44]$ یک γ -مسیر بین q و p_1 در G_S وجود دارد. به‌طور مشابه، اگر $p_2 = (1, y_2)$ که $y_2 \notin [-0.44, 0.44]$ آن‌گاه یک γ -مسیر بین q و p_2 در G_S وجود دارد. اگر $p_1 = (-1, y_1)$ و $p_2 = (1, y_2)$ که $y_1, y_2 \in (0.44, r]$ یا $y_1, y_2 \in [-r, -0.44]$ آن‌گاه $d_{G_S}(p_1, p_2) > \sqrt{|p_1 p_2|}$ در نتیجه لم ثابت می‌شود. \square

اگر $p_1 = (-1, -r)$ و $p_2 = (1, r)$ (یا $p_1 = (-1, r)$ و $p_2 = (1, -r)$) آن‌گاه G_S را یک نمونه‌ی دقیق درست (یا غلط) برای G می‌نامیم و با G_t (یا G_S) نمایش می‌دهیم. با استفاده از لم ۱۰۲ به آسانی نتیجه می‌شود که G_t و G_f هر دو γ -پوشش هستند.

فرض کنید Φ یک فرمول دودویی به فرم نرمال γ -عطفی است که شامل $k \geq 3$ متغیر و $l \geq 1$ بند است و $g_\Phi = 11k + 3$ و $g'_\Phi = 12k + 9$. گراف G_x را به صورت زیر می‌سازیم: ابتدا تعداد $3 - g'_\Phi = (g_\Phi + 8 + g'_\Phi)l - g'_\Phi - 3$ کپی از G کنار یکدیگر در یک خط افقی قرار می‌دهیم که فاصله‌ی افقی بین هر دو کپی 4.48 است. در گام بعدی $1 - t_\Phi$ یال جدید بین نزدیک‌ترین دیسک‌های هر دو کپی متوالی از G اضافه می‌کنیم. به هر کپی از G_x در G یک اندیس از 1 تا t_Φ نسبت می‌دهیم. به عنوان ستون j مراجعه می‌کنیم.

لم ۲۰۲. فرض کنید u و v دو راس دلخواه از G'_x هستند. اگر u و v در یک ستون یا دو ستون متوالی هستند آن‌گاه بین آن‌ها یک c -مسیر در G'_x وجود دارد؛ در غیر این صورت بین آن‌ها یک γ -مسیر در G'_x وجود دارد.

برهان. همان‌گونه که می‌دانیم هر ستون یک c -پوشش نادقیق است. برای هر دو راس در دو ستون متوالی به آسانی دیده می‌شود که یک c -مسیر وجود دارد. برای دو راس که حداقل یک ستون بین آن‌ها قرار دارد مسیر زیر را در نظر بگیرید؛ مسیری که در ستون‌های بین u و v از راس‌های $p_1, p'_1, p_{1a}, p'_{1a}, p_{1n}, p'_{1a}, p_{1r}, p'_{1r}, p'_2, p_2$ می‌گذرد و بین ستون‌های متوالی نیز از یال بین دو ستون استفاده می‌کند. در ستون‌های u و v نیز با یک مسیر کوتاه به مسیر بالا وصل می‌شود. با یک محاسبه داریم \square

$$\delta_{G'_x}(u, v) \leq \frac{33.28l_0 + 50}{18.48l_0 - 14} \leq 7$$

با استفاده از لم بالا نتیجه می‌شود که G_x یک c -پوشش نادقیق است.

گراف G_x^t (یا G_x^f) یک نمونه‌ی دقیق برای G_x است که هر ستون آن یک نمونه‌ی دقیق درست (یا غلط) است. با توجه به این‌که هر نمونه‌ی دقیق درست (یا غلط) یک γ -پوشش است و لم ۲۰۲ دیده می‌شود که G_x^t و G_x^f هر دو γ -پوشش هستند. فرض کنید G'_x یک نمونه‌ی دقیق γ -پوشش برای G_x است و G'_j ، برای $1 \leq j \leq t_\Phi$ ، زیرگراف G'_x متناظر با G_j است. شرایط لم ۱۰۲ برای هر G'_j روی می‌دهد. برای هر دو ستون متوالی دیده می‌شود که اگر یال بین آن‌ها هر دو انتهایش بالا (یا پایین) دیسک‌های متناظرشان هستند آن‌گاه $d_{G'_x}(a_{j+1}, c_j) > \sqrt{|a_{j+1}c_j|}$ (یا $d_{G'_x}(b_{j+1}, d_j) > \sqrt{|b_{j+1}d_j|}$). بنابراین نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۳۰۲. فرض کنید G'_x یک نمونه دقیق γ -پوشش برای G_x است. همه‌ی یال‌های بین دو ستون متوالی G'_x در یک جهت مایل هستند.

فرض کنید Φ یک فرمول دودویی به فرم نرمال γ -عطفی شامل متغیرهای x_1, \dots, x_k و شامل بندهای c_1, c_2, \dots, c_l است که هر بند به صورت $y_1 \vee y_2 \vee y_3$ است که هر کدام از y_1, y_2, y_3 یک متغیر یا نقیض یک متغیر است. در ادامه گراف

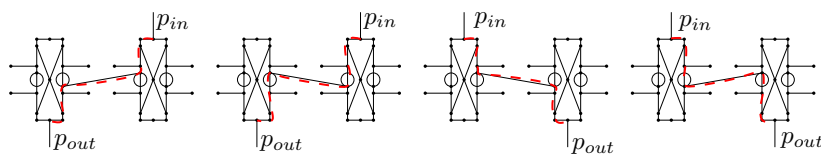
c_j	a_0	b_0	y
$\neg z_1 \vee \neg z_2 \vee \neg z_3$	۳	۰	$554,84k + 428,725$
$\neg z_1 \vee \neg z_2 \vee z_3$	۲	۱	$554,84k + 354,805$
$z_1 \vee \neg z_2 \vee \neg z_3$ یا $\neg z_1 \vee z_2 \vee \neg z_3$	۱	۰	$554,84k + 299,365$
$\neg z_1 \vee z_2 \vee z_3$	۱	۲	$554,84k + 280,885$
$z_1 \vee z_2 \vee \neg z_3$ یا $z_1 \vee \neg z_2 \vee z_3$	۰	۱	$554,84k + 225,445$
$z_1 \vee z_2 \vee z_3$	۰	۳	$554,84k + 206,965$

نادقیق G_Φ متناظر با Φ را می‌سازیم. در گام اول k کیپی از گراف G_x را روی همدیگر قرار می‌دهیم طوری که سمت چپ‌ترین راس همه‌ی کیپی‌های G_x روی یک خط افقی هستند و فاصله‌ی افقی بین سطرها 40 است. همچنین، به هر سطر یک شماره از 1 تا k را متناظر با متغیرها نسبت می‌دهیم. در گام دوم برای هر بند c_j چهار راس جدید با مختصات زیر به سطرها اضافه می‌کنیم. $p_a^{c_j} = (x_{p_{out}(k, n_{c_j}^l)}, y_{p_{out}(k, n_{c_j}^l)} - 1)$ ، $p_b^{c_j} = (x_{p_{out}(k, n_{c_j}^r + b_0)}, y_{p_{out}(k, n_{c_j}^r + b_0)} - 1)$ ، $(x_{p_{in}(1, n_{c_j}^r + a_0)}, y_{p_{in}(1, n_{c_j}^r + a_0)} + y^{c_j})$ و $p_d^{c_j} = (x_{p_{in}(1, n_{c_j}^l)}, y_{p_{in}(1, n_{c_j}^l)} + y^{c_j})$ که $n_{c_j}^r = g_\Phi + 2 + (j - 1)(g_\Phi + 8 + g'_\Phi)$ ، $n_{c_j}^l = 1 + (j - 1)(g_\Phi + 8 + g'_\Phi)$ و $y^{c_j} = \frac{1}{4}\{7|p_a^{c_j} p_d^{c_j}| - |p_b^{c_j} p_c^{c_j}| - 110k + 25,885\}$ (برای هر نقطه‌ی p در صفحه x_p و y_p به ترتیب مختصات افقی و عمودی p را نمایش می‌دهند). مقادیر a_0 و b_0 در جدول زیر آمده‌اند. همچنین، برای هر بند c_j یال‌های $(p_a^{c_j}, p_{in}(1, n_{c_j}^r + a_0))$ ، $(p_b^{c_j}, p_{out}(k, n_{c_j}^r + b_0))$ ، $(p_c^{c_j}, p_{out}(k, n_{c_j}^l))$ و $(p_d^{c_j}, p_{in}(1, n_{c_j}^l))$ را به سطرها اضافه می‌کنیم. در گام سوم برای هر بند c_j قرار می‌دهیم $n = n_{c_j}^r + a_0$. سپس برای هر i از 1 تا $k - 1$ ، اگر متغیر x_i به صورت مثبت در بند ظاهر شده باشد، یک واحد n اضافه می‌کنیم و اگر متغیر x_i به صورت نقیض در بند ظاهر شده باشد، یک واحد از n کم می‌کنیم و در غیر این صورت مقدار n تغییری نمی‌کند. یال $(p_{out}(i, n), p_{in}(i + 1, n))$ را به سطرها اضافه می‌کنیم. در گام چهارم برای هر بند c_j و هر $i = 1, \dots, k - 1$ یال $(p_{in}(i + 1, n_{c_j}^l), p_{out}(i, n_{c_j}^l))$ را به سطرها اضافه می‌کنیم و در گام آخر برای هر بند c_j و هر $j_1 = 1, \dots, g'_\Phi - 1$ و $j_2 = 1, \dots, g'_\Phi$ یال‌های $(p_{out}(i, n_{c_j}^l + j_1), p_{in}(i + 1, n_{c_j}^l + j_1))$ و $(p_{out}(i, n_{c_j}^l - j_2), p_{in}(i + 1, n_{c_j}^l - j_2))$ را به سطرها اضافه می‌کنیم. به این ترتیب G_Φ متناظر با Φ ساخته می‌شود.

به آسانی دیده می‌شود که G_Φ یک گراف نادقیق مسطح است و بنابراین هر نمونه‌ی دقیق آن نیز مسطح است. همچنین G_Φ در یک زمان چندجمله‌ای بر حسب اندازه‌ی Φ قابل ساخت است. مقدار m را برابر با تعداد یال‌های G_Φ تعریف می‌کنیم. یک مسیر متناظر با هر بند c_j به صورت زیر تعریف می‌کنیم: یال (اضافه شده در گام دوم) با یک نقطه‌ی انتهایی $p_a^{c_j}$ را به مسیر اضافه می‌کنیم. همه‌ی یال‌های اضافه شده در گام سوم را به ترتیب از سطر 1 تا k به مسیر اضافه می‌کنیم. یال‌های $(p_{out}(k, n_{c_j}^r + b_0), p_b^{c_j})$ ، $(p_c^{c_j}, p_c^{c_j})$ و $(p_c^{c_j}, p_{out}(k, n_{c_j}^l))$ را به مسیر اضافه می‌کنیم. همه‌ی یال‌های اضافه شده در گام چهارم را به ترتیب از سطر آخر به سطر اول اضافه می‌کنیم و بالاخره یال (اضافه شده در گام دوم) با یک نقطه‌ی انتهایی $p_d^{c_j}$ را به مسیر اضافه می‌کنیم. در بین یال‌های متوالی بالا تعدادی فاصله وجود دارد که برای پر کردن این فاصله‌ها از کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو نقطه در G_Φ استفاده می‌کنیم. فرض کنید G'_Φ یک نمونه دقیق برای G_Φ است که هر سطر آن یک 7 -پوشش دارد. به آسانی دیده می‌شود که کوتاه‌ترین مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ از مسیر بالا می‌گذرد.

کوتاه‌ترین مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ در G'_Φ را در نظر بگیرید. همان‌گونه که در شکل ۲ دیده می‌شود شیب یال بین دو ستون متوالی واقع بر کوتاه‌ترین مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ (واقع در سطر متناظر با یکی از متغیرهای بند c_j) باعث کم یا زیاد شدن طول این مسیر می‌شود.

لم ۰.۴۲. بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ در G'_Φ یک 7 -مسیر وجود دارد اگر و فقط اگر حداقل یکی از این سه یال (متناظر با سه متغیر بند) باعث کم شدن طول کوتاه‌ترین مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ (ذکر شده در بالا) شود.



شکل ۲: نمایش تاثیر شیب یال بین دو ستون متوالی واقع در یکی از سطرهاى متناظر با بند c_j در طول مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$.

□ برهان. به علت کمبود فضا برهان به پیوست منتقل شده است.

لم ۵.۲. فرض کنید G'_Φ یک نمونه‌ی دقیق دلخواه برای G_Φ است. اگر u و v دو راس دلخواه G'_Φ باشند که هر دو در یک سطر قرار ندارند یا هر دو نقاط انتهایی یک مسیر متناظر با یک بند نیستند، آنگاه بین u و v در G'_Φ یک γ -مسیر وجود دارد.

برهان. کافی است حالت‌های مختلف را برای u و v بررسی کنیم. به عنوان مثال هر دو در بالای سطر اول باشند یا یکی در بالای

سطر اول و دومی در یکی از سطرها باشد. برای دیدن برهان کامل به پیوست مراجعه کنید.

□

با توجه به لم ۵.۲ و این‌که هر سطر G_x یک c -پوشش نادقیق است نتیجه می‌شود که G_Φ یک c -پوشش نادقیق است.

لم ۶.۲. اگر فرمول دودویی Φ ارضا شود، آنگاه G_Φ متناظر با Φ یک نمونه‌ی دقیق γ -پوشش دارد.

برهان. فرض کنید Φ ارضا پذیر است. برای G_Φ نمونه‌ی دقیق G'_Φ را به صورت زیر می‌سازیم. اگر $x_i = true$ (یا $x_i = false$),

آنگاه یک G_x^t (یا G_x^f) برای سطر i گراف G_Φ در G'_Φ قرار می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که G'_Φ یک γ -پوشش است.

با استفاده از لم ۵.۲، یک γ -مسیر بین اکثر جفت راس‌های G'_Φ وجود دارد. می‌دانیم که G_x^f و G_x^t هر دو γ -پوشش هستند.

بنابراین بین هر جفت راس هر سطر یک γ -مسیر وجود دارد. فرض کنید متغیر x_i به صورت مثبت در بند c_j است و باعث ارضا

شدن بند می‌شود. از آنجایی که در سطر i یک G_x^t داریم بنا به لم ۴.۲ یک γ -مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ وجود دارد. به طور مشابه

حالتی که x_i به صورت نقیض در بند c_j است قابل اثبات است. بنابراین G'_Φ یک γ -پوشش است.

□

لم ۷.۲. اگر گراف G_Φ متناظر با Φ یک نمونه‌ی دقیق γ -پوشش د، آنگاه Φ ارضا پذیر است.

برهان. فرض کنید G'_Φ یک نمونه‌ی دقیق γ -پوشش برای G_Φ است. به آسانی مشاهده می‌شود که هر سطر G'_Φ نیز یک γ -پوشش

است. در نتیجه بنا به نتیجه ۳.۲ همه یال‌های بین ستون‌های متوالی در یک جهت مایل هستند. اگر این یال‌ها در سطر i صعود (یا

نزول) کنند، آنگاه به متغیر x_i مقدار درست (یا غلط) نسبت می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که این انتساب به متغیرها Φ را ارضا می‌کند.

از آنجایی که G'_Φ یک γ -پوشش است، بنابراین یک γ -مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ وجود دارد. بنا به لم ۴.۲ حداقل یکی از یال‌های

بین دو ستون در مسیر متناظر با بند c_j باعث کم شدن طول کوتاه‌ترین مسیر بین $p_a^{c_j}$ و $p_d^{c_j}$ است. فرض کنید این یال در سطر

i قرار دارد. اگر x_i به صورت مثبت در بند c_j قرار دارد؛ واضح است که همه یال‌های بین ستون‌های متوالی آن نزولی هستند.

بنابراین x_i باعث ارضا شدن c_j است. به طور مشابه حالتی که x_i به صورت نقیض در بند c_j قرار دارد قابل اثبات است. بنابراین

Φ ارضا پذیر است.

□

قضیه ۸.۲. مسئله ۱.۱ یک مسئله NP -سخت است.

برای پوشش‌های نادقیق یک مسئله‌ی بهینه‌سازی معرفی کردیم. در این مسئله برای یک پوشش نادقیق علاقه‌مند به یافتن یک نمونه‌ی دقیق با کم‌ترین ضریب کشش هستیم. با استفاده از یک تبدیل چندجمله‌ای از مسئله‌ی 3SAT به مسئله نشان دادیم که 3SAT ارضا پذیر است اگر و فقط اگر پوشش نادقیق محاسبه شده دارای یک نمونه‌ی دقیق γ -پوشش است. این تبدیل نشان می‌دهد که این مسئله NP-سخت است.

مراجع

- [1] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, New York, 1979.
- [2] G. Narasimhan and M. Smid, *Geometric spanner networks*, Cambridge University Press, 2007.
- [3] M. A. Abam, P. Carmi, M. Farshi, and M. Smid, On the power of the semi-separated pair decomposition, *Computational Geometry: Theory and Applications* **46**(2013), 631-639.
- [4] O. Cheong, H. Haverkort, and M. Lee, Computing a minimum-dilation spanning tree is NP-hard, *Computational Geometry: Theory and Applications* **41**(2008), 188-205.
- [5] R. Klein and M. Kutz, Computing geometric minimum-dilation graphs is NP-hard, In *Proc. of the 14th International Symposium on Graph Drawing, LNCS 4372* pp.196-207, 2006.