Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۷-۱۰ شهریور ۱۳۹۵

رویت‌پذیری چندضلعی‌های ساده با دیده‌بان‌های جفت رأس مجاور

محمدجواد حکمت نسب و علی محدث*

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، hekmat.mj@aut.ac.ir
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mohades@aut.ac.ir

چکیده

رویت‌پذیری یکی از مسائل معروف و شناخته شده در حوزه هندسه محاسباتی می‌باشد. در یک چند ضلعی دو نقطه نسبت به هم رویت‌پذیر هستند هرگاه خط واصل آن‌دو، به صورت کامل در چندضلعی واقع شود. می‌گوئیم چندضلعی P توسط گارد نقطه‌ای x پوشش داده می‌شود، هرگاه محیط و تمام نقاط داخلی آن توسط x رویت‌پذیر باشند. گاردها علاوه بر نقطه و رأس می‌توانند یال، قطر، مسیر و غیره نیز در نظر گرفته شوند و رویت‌پذیری نسبت به آنها بررسی شود. در این مقاله به معرفی مفهوم گاردهای جفت رأس مجاور می‌پردازیم و سپس یک کران بالا برای تعداد گاردهای جفت رأس مجاور در چندضلعی‌های غیرستاره‌ای ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: هندسه محاسباتی، رویت‌پذیری، موزه هنر، گارد یالی، گارد جفت رأس مجاور.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 65D18، 68U05.

۱ مقدمه

مفهوم رویت‌پذیری یکی از مفاهیم پرکاربرد در هندسه محاسباتی می‌باشد که در حوزه‌هایی همچون پردازش تصویر، گرافیک کامپیوتری، کنترل ربات و شبکه‌های کامپیوتری کاربرد دارد.

در چندضلعی P دو نقطه $p, q \in P$ را نسبت به هم رویت‌پذیر گوئیم اگر خط واصل آن‌دو، داخل چندضلعی P قرار گیرد. به چندضلعی‌هایی که تمام فضای آنها توسط نقطه‌ای مانند $x \in P$ رویت‌پذیر باشد، چندضلعی ستاره‌ای می‌گوئیم. نقطه x را یک گارد نقطه‌ای برای چندضلعی P و به مجموعه نقاطی همانند x که تمام چندضلعی از آن نقاط رویت‌پذیر می‌باشد، مرکز چندضلعی می‌گوئیم. بدیهی است اگر مرکز یک چندضلعی تهی باشد، غیرستاره‌ای است.

یکی از مسائل معروف در حوزه رویت‌پذیری مسئله موزه هنر می‌باشد که هدف آن پیدا کردن کمترین تعداد گاردها برای پوشش هر چندضلعی است. Chvatal [۱] نشان داد که برای هر چندضلعی ساده با n رأس، همواره $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ گارد نقطه‌ای کافی و گاهی لازم می‌باشد. اگر گاردها قادر به حرکت باشند انواع دیگری از گاردها تعریف می‌شوند. با فرض حرکت گاردها بر روی یک ضلع، گارد یالی تعریف می‌شود. گارد یالی، گاردی است که در آن مجموعه تمام نقاط روی یک ضلع به عنوان گارد در نظر گرفته می‌شود. نقطه‌ای مانند p را نسبت به گارد یالی uv رویت‌پذیر گوئیم اگر نقطه‌ای مانند $q \in uv$ وجود داشته باشد که q و p رویت‌پذیر باشند. یک گارد یالی را بسته گوئیم هرگاه شامل دو نقطه انتهایش باشد، باز گوئیم اگر شامل هیچ یک از نقاط انتهایش نباشد و نیمه باز گوئیم اگر فقط شامل یکی از نقاط انتهایش باشد. انواع مختلف گاردها را می‌توان در شکل ۱ مشاهده کرد. در چندضلعی P یال uv را یک گارد یالی گوئیم هرگاه تمام چندضلعی توسط آن قابل رویت باشد.

Toth و همکارانش [۴] نشان دادند که هر چندضلعی غیر ستاره‌ای حداکثر می‌تواند یک گارد یالی باز داشته باشد. Park و همکارانش [۳] نشان دادند که هر چندضلعی غیرستاره‌ای می‌تواند حداکثر ۳ گارد یالی بسته داشته باشد. Mukhopadhyay و همکارانش [۲] نشان دادند که برای گاردهای یالی نیمه‌باز نیز این عدد برابر ۳ می‌باشد.

* سخنران و مسئول مکاتبات

(آ) یالی بسته (ب) یالی باز (ج) یالی نیمه باز (د) جفت رأس مجاور

شکل ۱: انواع گاردها

۲ گارد جفت رأس مجاور

تعریف ۱.۲. یک گارد جفت رأس مجاور از دو رأس ابتدا و انتهای یک یال تشکیل می‌شود. به عبارت دیگر این نوع گارد، حاصل تفاضل گارد یالی باز از گارد یالی بسته می‌باشد [شکل ۱-د]. اگر دو رأس u و v دو انتهای یال uv باشند، گارد ج.ر.م متناظر با این یال را به صورت $<u, v>$ نمایش می‌دهیم. نقطه p را توسط $<u, v>$ رویت‌پذیر گوئیم اگر توسط u یا v و یا هردوی آنها رویت‌پذیر باشد. اگر یک فرستنده امواج بی‌سیم و یک تکرار کننده متصل به آن داشته باشیم، می‌توانیم یکی از آنها را در نقطه v و دیگری را در نقطه u قرار دهیم. نقاطی تحت پوشش امواج هستند که توسط فرستنده یا تکرار کننده رویت‌پذیر باشند.

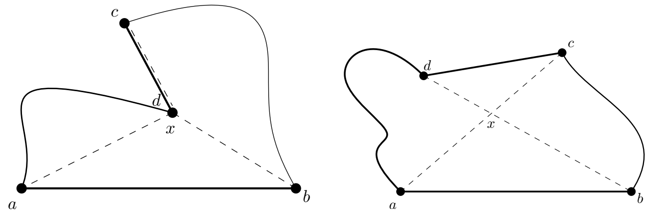
نکته ۲.۲. منظور از کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در یک چندضلعی، کوتاهترین مسیری است که تمام آن داخل چندضلعی باشد. واضح است که نقطه p توسط گارد $<u, v>$ رویت‌پذیر است اگر و تنها اگر کوتاهترین مسیر از p به u یا v برابر خط pu یا pv باشد.

در ادامه به بررسی حداکثر تعداد گاردهای ج.ر.م که می‌تواند در یک چندضلعی غیرستاره‌ای وجود داشته باشد می‌پردازیم. منظور از گارد ج.ر.م در یک چندضلعی گاردی است که تمام چندضلعی از آن قابل رویت باشد.

فرض کنید $<a, b>$ و $<c, d>$ دو گارد ج.ر.م برای چندضلعی P باشند. a، b، c و d به ترتیب پادساعتگرد بر روی محیط چندضلعی قرار گرفته اند. کوتاهترین مسیرها از a به d و از b به c را درون P رسم می‌کنیم. یال ab، مسیر b به c، یال cd و مسیر a به d تشکیل یک چندضلعی می‌دهند که آن را Q می‌نامیم. در این حالت لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۳.۲. چندضلعی Q یک چندضلعی ساده می‌باشد.

برهان. با توجه به اینکه چندضلعی Q داخل چندضلعی P می‌باشد، کافی است ثابت کنیم مسیر از a به d و مسیر b به c باهم تلاقی ندارند. فرض کنید نقطه‌ای مانند q بین این دو مسیر مشترک باشد، بنابراین d توسط a دیده نمی‌شود، با فرض تلاقی داشتن این دومسیر، مسیر از b به d نیز از q می‌گذرد. پس b نیز نمی‌تواند d را ببیند. بنابراین نقطه d توسط $<a, b>$ دیده نمی‌شود که با فرض گارد ج.ر.م بودن $<a, b>$ در تناقض است. لازم به ذکر است اگر نقطه q روی خط واصل ad باشد نقطه c توسط $<a, b>$ دیده نمی‌شود. □



(ب) (آ)

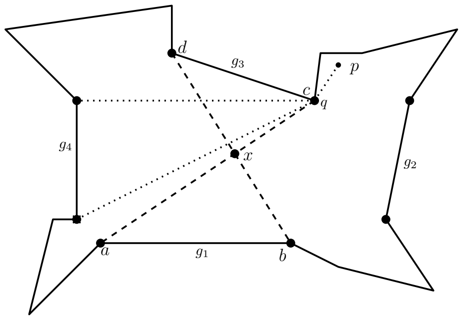
شکل ۲: اثبات لم ۵.۲، مسیر a به c با مسیر b به d اشتراک دارد.

لم ۴.۲. کوتاهترین مسیر از a به c یا قطر چندضلعی Q می‌باشد و یا فقط تنها از یکی از رئوس b یا d عبور می‌کند، به‌طور مشابه، کوتاهترین مسیر از b به d نیز یا قطر Q است و یا فقط تنها از یکی از رئوس a یا c عبور می‌کند.

برهان. از آنجا که $<a, b>$ یک گارد ج.ر.م است، اگر مسیر a به c قطر Q نباشد، حتما نقطه b توسط c دیده می‌شود، در اینصورت کوتاهترین مسیر از a به c حرکت روی یال ab و سپس رفتن از b به c می‌باشد. قسمت‌های دیگر لم به طور مشابه اثبات می‌شود. □

لم ۵.۲. مسیر از a به c و مسیر از b به d در نقطه‌ای مانند x باهم اشتراک دارند.

برهان. با توجه به لم ۴.۲، اگر هر دوی این مسیرها قطر چندضلعی Q باشند، آنگاه با توجه به ترتیب رئوسشان روی محیط چندضلعی، یکدیگر را قطع خواهند کرد. (شکل ۲-الف) اگر یکی از آنها از رأس دیگری عبور کند، طبق لم ۴.۲، این رأس یکی از دو انتهای قطر دیگر است و همین رأس را می‌توان به عنوان نقطه اشتراک در نظر گرفت (شکل ۲-ب). □



شکل ۳: اثبات لم ۶.۲، اگر چهارضلعی دارای ۴ گارد ج.ر.م باشد، نقطه x باید در مرکز آن باشد.

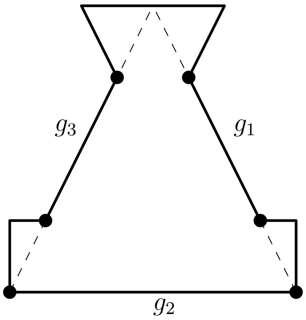
حال نشان می‌دهیم هر چندضلعی ساده غیرستاره‌ای حداکثر دارای ۳ گارد ج.ر.م است به طوریکه هر کدام از آنها به تنهایی تمام چندضلعی را پوشش دهند. فرض کنید P چندضلعی ساده باشد که ۴ گارد ج.ر.م g_1، g_2، g_3 و g_4 به ترتیب پادساعتگرد بر روی محیط آن قرار گرفته‌اند. فرض کنید $g_1 =< a, b >$ و $g_3 =< c, d >$ باشد که a، b، c و d از هم مجزا و به ترتیب پادساعتگرد باشند. طبق لم‌های ۳.۲ ، ۴.۲ ، ۵.۲ برای g_1 و g_3 می‌دانیم که چندضلعی ساده Q وجود دارد و در آن مسیر از a به c و مسیر از b به d در نقطه ای مانند x با هم تلاقی دارند.

لم ۶.۲. نقطه x در مرکز چندضلعی P قرار دارد.

برهان. نشان می‌دهیم هر نقطه دلخواه مانند $p \in P$ نسبت به x رویت‌پذیر است. از لم ۳.۲ و ۵.۲ می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث $\triangle abx$ و $\triangle cdx$ درون چندضلعی Q قرار دارند (ممکن است یکی از این مثلثها وجود نداشته باشد). اگر نقطه p درون یکی از این مثلث‌ها بود، آنگاه خط px درون آن مثلث قرار دارد و نقطه p توسط x رویت‌پذیر است. اگر نقطه p خارج از این مثلث‌ها بود و خط px قابل رسم باشد آنگاه p توسط x رویت‌پذیر است. فرض کنید خط px قابل رسم نباشد. بدون از دست دادن کلیات مسئله، فرض کنید نقطه p سمت راست مسیر a به c و مسیر b به d باشد و مسیر از p به x در نقطه ای مثل q یک چرخش به راست مطابق شکل ۳ انجام دهد. از آنجا که p توسط $< c, d >$ دیده می‌شود و طبق فرض ما d نمی‌تواند آن را ببیند پس طبق نکته ۲.۲ باید $c = q$ باشد. از طرفی می‌دانیم نقطه x روی خط واصل ac بوده و مسیر p به x در نقطه c دارای چرخش به راست است، پس مسیر از p به هر نقطه در سمت چپ ac در نقطه c دارای گردش به راست خواهد بود. و این یعنی نقطه p توسط گارد g_4 رویت‌پذیر نیست که این با فرض گارد بودن g_4 در تضاد است. در صورتی که نقطه p در سمت چپ مسیر a به c و b به d باشد، با برهانی مشابه می‌توان نشان داد که توسط g_2 رویت‌پذیر نیست. پس مسیر p به x نمی‌تواند خط راست نباشد و نقطه p توسط x دیده می‌شود. □

قضیه ۷.۲. هر چندضلعی ساده و غیرستاره‌ای حداکثر ۳ گارد ج.ر.م دارد.

برهان. اگر چندضلعی ساده P دارای چهار گارد ج.ر.م باشد، آنگاه طبق لم ۶.۲ نقطه‌ای مانند x وجود دارد که در مرکز این چندضلعی است و این یعنی P ستاره‌ای می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت هر چندضلعی غیرستاره‌ای حداکثر ۳ گارد ج.ر.م دارد. شکل ۴ یک چندضلعی غیرستاره‌ای با ۳ گارد ج.ر.م را نشان می‌دهد. □

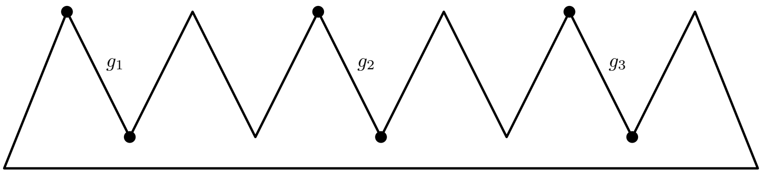


شکل ۴: چندضلعی غیر ستاره‌ای با ۳ گارد ج.ر.م

۳ نتیجه‌گیری

با توجه به قضیه ۷.۲ می‌توان یک روش برای تشخیص ستاره‌ای بودن چندضلعی‌ها ارائه کرد. اساس کار این روش نیز ساده می‌باشد، کافی است برای هر رأس از چندضلعی ناحیه قابل رویت توسط آن را محاسبه کرد. اگر هیچ یک از رئوس مرکز چندضلعی نباشند، آنگاه اجتماع هر دو رأس مجاور را محاسبه می‌کنیم، اگر برابر با کل چندضلعی شد یعنی یک گارد ج.ر.م داریم. در نهایت اگر تعداد این گاردها بیش از ۳ بود مطمئن هستیم که چندضلعی ستاره‌ای می‌باشد.

با در نظر گرفتن گاردهای جفت رأس مجاور یک مسئله جدید در موزه هنر مطرح می‌شود: چه تعداد از این نوع گارد برای پوشش هر چندضلعی دلخواه کافی و گاهی لازم می‌باشد؟ یک کران خیلی بالا برای جواب این سوال مقدار $\lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$ است که با توجه به کافی بودن $\lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$ گارد رأسی برای پوشش هرچندضلعی ساده [۱]، واضح می‌باشد. از طرف دیگر شکل ۵ کران پایین $\lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$ را برای جواب این سوال ارائه می‌کند. بدیهی است که کران بالای این جواب می‌تواند یک کران بالا برای مسئله موزه هنر به کمک گاردهای یالی بسته، باشد.



شکل ۵: حداقل $\lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$ گارد ج.ر.م برای پوشش این چندضلعی لازم است

مراجع

[1] Chvatal. V, *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combintorial Theory, Series B, 18(1):38-41,1975.

[2] Mukhopadhyay. A, Drouillard. C, Toussaint. G, *Guarding simple polygons with semi-open edge guards* , In Third International Conference on Digital Information Processing and Communications, Islamic Azad University (IAU), Dubai, United Arab Emirates, Jan. 30, 2013 - Feb. 1, 2013.

[3] Park. J.-H, Shin. S.Y, Chwa. K.-Y, and Woo. T.C, *On the number of guard edges of a polygon*, Discrete & Computational Geometry, 10:447-462, 1993.

[4] Toth. C, Toussaint. G, and Winslow. A, *Open guard edges and edge guards in simple polygons* In Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, ON, Canada,Aug 10-12, 2011.