Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۷-۱۰ شهریور ۱۳۹۵

تشخیص وترافزایشی بودن برای چند کلاس از گراف‌های هندسی

مسعود صدیقی، مهدیه هاشمی‌نژاد† و راحله نماینده*

دانشگاه یزد، masoudseddighi@stu.yazd.ac.ir
دانشگاه یزد، hasheminezhad@yazd.ac.ir
دانشگاه یزد، namayande@stu.yazd.ac.ir

چکیده

یک گراف هندسی را وترافزایشی گویند هرگاه بین هر دو رأس از گراف، مسیری وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر چهار نقطه a، b، c و d که به‌ترتیب روی مسیر قرار گرفته‌اند، فاصله a و d از فاصله b و c کمتر نباشد. در این مقاله نشان می‌دهیم برای دورها و θ-گراف‌های هندسی با n رأس، در زمان $O(n^2)$ می‌توان وترافزایشی بودن را تشخیص داد. برای گراف‌هایی که هر یال آنها روی حداکثر یک دور قرار دارد و هر دور دقیقا یک رأس برشی دارد، می‌توان در زمان $O(n^2 + k^2 n)$ که k مجموع تعداد دورها و رئوس درجه یک گراف و n تعداد رئوس گراف است، وترافزایشی بودن را تشخیص داد. همچنین نشان می‌دهیم تشخیص وترافزایشی بودن گراف‌های هندسی متعامد با n رأس و m یال در زمان $O(nm)$ ممکن است.

واژه‌های کلیدی: گراف هندسی خودگرا، گراف هندسی وترافزایشی، رسم گراف، گراف هندسی متعامد، شبکه منهتن.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010): 68U05.

۱ مقدمه

گرافی که در صفحه رسم شده باشد به‌طوری‌که منحنی متناظر با هر یال، پاره‌خط واصل بین دو انتهای آن یال باشد، گراف هندسی نام دارد. گراف‌های هندسی وترافزایشی [1] اولین بار در سال ۲۰۱۲ در [۱] تعریف شدند. یک گراف هندسی را وترافزایشی گویند هرگاه بین هر دو رأس آن، یک مسیر وترافزایشی وجود داشته باشد. یک مسیر را وترافزایشی گویند هرگاه برای هر چهار نقطه a، b، c و d که به‌ترتیب روی مسیر قرار گرفته‌اند، فاصله a و d از فاصله b و c کمتر نباشد. برای تشخیص وترافزایشی بودن مسیرهای هندسی، الگوریتمی با پیچیدگی $O(n)$ و برای درخت‌ها، الگوریتمی با پیچیدگی $O(n^2)$ وجود دارد [۱]. اما تاکنون هیچ الگوریتمی برای تشخیص وترافزایشی بودن گراف‌ها در حالت کلی ارائه نشده است. در این مقاله مسئله وترافزایشی بودن را برای دورها، θ-گراف‌ها، کلاسی از گراف‌ها به‌نام گراف‌های خوشه‌انگوری و گراف‌های هندسی متعامد بررسی می‌کنیم.

محققان دو مسئله دیگر را در زمینه گراف‌های هندسی وترافزایشی مورد بررسی قرار داده‌اند. اول اینکه برای یک گراف داده شده، آیا رسمی وترافزایشی از آن گراف وجود دارد؟ این سؤال برای درخت‌ها و گراف‌های مثلث‌بندی [2] در مراجع [۱] و [۴] پاسخ داده شده است. در مسئله دوم برای یک تعداد نقطه داده شده در صفحه، وجود و ساخت پوشش‌های هندسی [3] وترافزایشی روی نقاط مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد که در مراجع [۲] و [۳] به این مسئله پرداخته شده است.

† مسئول مکاتبات
* سخنران

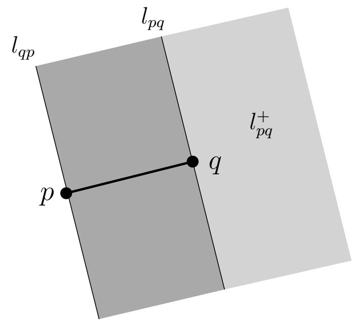
[1] increasing-chord
[2] triangulated graph
[3] geometric spanner

این مقاله شامل مطالبی است که در ادامه می‌آید: در قسمت ۲ تعاریف مقدماتی و نتایج مورد نیاز بیان می‌شود. در قسمت ۳ نشان می‌دهیم، وترافزایشی بودن یک دور هندسی و یک θ-گراف هندسی با n رأس را می‌توان در زمان $O(n^۲)$ تشخیص داد. در قسمت ۴ نشان می‌دهیم، می‌توان در زمان $O(n^۲ + k^۲n)$ برای گراف‌های خوشه‌انگوری هندسی با n رأس و k دور و رأس درجه یک، وترافزایشی بودن را تشخیص داد. در نهایت در قسمت ۵ نشان می‌دهیم وترافزایشی بودن گراف‌های هندسی متعامد با منهتن [۴] بودن آنها معادل است و تشخیص منهتن بودن آنها در زمان $O(nm)$ امکان‌پذیر است.

۲ تعاریف مقدماتی

یک مسیر بین دو رأس s و t، از s به t **خودگرا** [۵] است هرگاه به‌ازای هر سه نقطه a، b و c به‌طوری‌که s, a, b, c, t به‌ترتیب روی مسیر قرار گرفته‌اند، فاصله اقلیدسی a و c از فاصله اقلیدسی b و c کمتر نباشد. با توجه به تعاریف واضح است که یک مسیر بین دو رأس s و t وترافزایشی است اگر و فقط اگر هم از s به t و هم از t به s خودگرا باشد.

نمادگذاری: پاره‌خط $\overline{pq}$ در صفحه را در نظر بگیرید. l_{pq} خط عمود بر $\overline{pq}$ و شامل نقطه q است. نیم‌صفحه بسته که مرز l_{pq} دارد و شامل نقطه p نیست را با l^+_{pq} نمایش می‌دهیم. ناحیه محدود بین دو خط l_{pq} و l_{qp} را **نوار** pq می‌گوییم.



شکل ۱: خطوط l_{pq} و l_{qp}، نوار pq که خاکستری تیره است و l^+_{pq} که خاکستری روشن است.

قضیه ۱.۲. [۱] فرض کنید $P = (s = v_۱, v_۲, \dots, v_n = t)$ یک مسیر بین دو رأس s و t است. آنگاه مسیر از s به t خودگرا است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $۱ < i < j \leq n$، نقطه v_j در $l^+_{v_{i-۱}v_i}$ قرار گیرد. به‌طور معادل، مسیر از s به t خودگرا است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $۱ < i \leq n$، پوسته محدب [۶] نقاط $\{v_i, v_{i+۱}, \dots, v_n\}$ در $l^+_{v_{i-۱}v_i}$ قرار گیرد.

بر اساس قضیه ۱.۲ در مرجع [۱]، الگوریتمی ارائه شده است که می‌تواند در زمان خطی با شروع از ابتدای یک مسیر، رأسی را بیابد که زیرمسیر از آن رأس به رأس ابتدای مسیر، خودگرا باشد و نسبت به این ویژگی ماکسیمال باشد.

توجه ۲.۲. در درخت‌ها خاصیت وترافزایشی و خاصیت خودگرایی معادلند زیرا بین هر دو رأس دلخواه، دقیقا یک مسیر وجود دارد.

لم ۳.۲. [۱] نوار هر یال دلخواه uv از درخت هندسی وترافزایشی T، با $T - uv$ برخوردی ندارد.

عکس گزاره فوق نیز درست است، بنابراین می‌توان در زمان $O(n^۲)$، وترافزایشی بودن یک درخت را تشخیص داد.

[۴] manhattan
[۵] self-approaching
[۶] convex hull

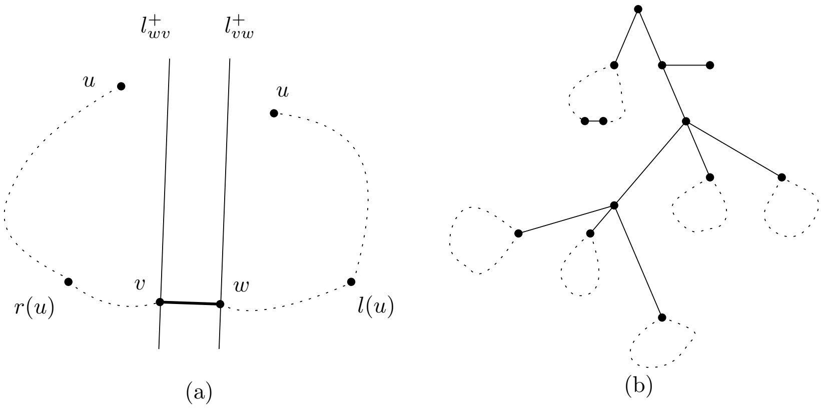
۳ دورها و θ-گراف‌ها

با توجه به قضیه ۱.۲، می‌توان خودگرا یا وترافزایشی بودن هر گراف که تعداد ثابتی مسیر بین هر دو رأس آن وجود دارد را در زمان $O(n^3)$ تشخیص داد. در ادامه الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^2)$ برای تشخیص وترافزایشی بودن دورها و θ-گراف‌های هندسی ارائه می‌دهیم.

فرض کنید u یک رأس دلخواه از یک دور هندسی باشد. طولانی‌ترین مسیر وترافزایشی از دور که از u شروع می‌شود و به‌صورت ساعتگرد ادامه می‌یابد را در نظر بگیرید. رأس انتهای این مسیر را **رأس راست** u می‌نامیم و با $r(u)$ نشان می‌دهیم. **رأس چپ** u، $l(u)$ به‌صورت مشابه تعریف می‌شود.

گزاره ۱.۳. اگر u یک رأس دلخواه از یک دور هندسی وترافزایشی باشد، آنگاه $l(u) = r(u)$ و یا اینکه $r(u)$ و $l(u)$ مجاورند به‌طوری‌که $r(u)$ در ترتیب دوری ساعتگرد، قبل از $l(u)$ قرار می‌گیرد.

برهان. $r(u)$ و $l(u)$ از هم عبور نمی‌کنند چون در این‌صورت یالی از دور وجود دارد که در نوار آن، هیچ نقطه‌ای از دور قرار ندارد و در صورتی‌که حالت‌های ذکر شده در گزاره رخ ندهد رأسی وجود دارد که بین آن رأس و u، مسیر وترافزایشی وجود ندارد. □



شکل ۲: (a) عبور $r(u)$ و $l(u)$ از یکدیگر، (b) نمونه‌ای از یک گراف خوشه‌انگوری

در یک دور هندسی، رأس u را یک **رأس خوب** می‌نامیم هرگاه $l(u) = r(u)$ و یا اینکه $l(u)$ و $r(u)$ مجاورباشند به‌طوری‌که در ترتیب ساعتگرد، $r(u)$ قبل از $l(u)$ قرار گیرد.

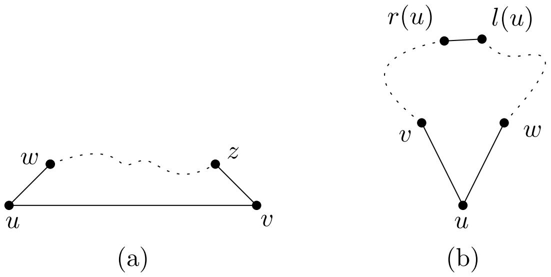
نتیجه ۲.۳. یک دور هندسی وترافزایشی است اگر و فقط اگر همه رأس‌های آن خوب باشند.

قضیه ۳.۳. می‌توان در زمان $O(n^2)$ وترافزایشی بودن یک دور هندسی با n رأس را تشخیص داد.

برهان. (خلاصه) با استفاده از الگوریتم یافتن زیرمسیر ماکسیمال خودگرا در مرجع [۱] و گزاره ۱.۳ می‌توان خوب بودن یک رأس از یک دور هندسی را در زمان $O(n)$ تشخیص داد. □

لم ۴.۳. [۴] در یک دور هندسی خودگرا، هیچ دو زاویه غیرمتوالی همزمان کمتر از ۹۰° نیستند.

از لم ۴.۳ می‌توان نتیجه گرفت در یک دور هندسی خودگرا با حداقل چهار یال، حداکثر دو زاویه حاده وجود دارد. در حالت‌هایی که حداقل یک زاویه حاده داریم، بررسی وترافزایشی بودن دور در زمان خطی ممکن است. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌کنید



شکل ۳: (a) دور هندسی با دو زاویه حاده (b) دور هندسی با یک زاویه حاده

در قسمت (a) کافی است وترافزایشی بودن مسیر از u به z و مسیر از w به v را بررسی کنیم. در قسمت (b) کافی است خوب بودن رأس u و وترافزایشی بودن مسیر از v به w بررسی شود.

یک گراف که از دو رأس درجه ۳ و سه مسیر با رأس‌های میانی مجزا بین دو رأس درجه ۳ تشکیل شده است را یک **θ-گراف** گویند. بنابراین هر θ-گراف دارای دو رأس با درجه سه است و بقیه رئوس درجه دو دارند. رأس u از یک θ-گراف را خوب گوییم هرگاه u به همه رئوس دیگر، مسیر وترافزایشی داشته باشد.

گزاره ۵.۳. می‌توان در زمان $O(n)$، خوب بودن یک رأس از یک θ-گراف را تشخیص داد. بنابراین وترافزایشی بودن یک θ-گراف را می‌توان در زمان $O(n^2)$ تشخیص داد.

برهان. (خلاصه) برای اثبات این قضیه از مفهوم خوب بودن یک رأس از یک دور استفاده می‌شود. □

۴ گراف‌های خوشه‌انگوری

گرافی همبند که هر یال آن حداکثر روی یک دور قرار دارد و هر دور آن شامل یک رأس برشی است را یک **گراف خوشه‌انگوری** گویند. نمونه‌ای از گراف خوشه‌انگوری را در قسمت (b) شکل ۲ ملاحظه می‌کنید. مجموع تعداد دورها و تعداد رأس‌های درجه یک را با k نشان می‌دهیم.

واضح است که در یک گراف خوشه‌انگوری هندسی وترافزایشی، با حذف همه دورها، درخت حاصل باید وترافزایشی باشد و هر کدام از دورها نیز باید وترافزایشی باشند. فرض کنید G یک گراف خوشه‌انگوری هندسی باشد که دورهای آن وترافزایشی هستند. مجموعه رأس‌های ویژه گراف تشکیل شده است از رئوس درجه یک و رئوسی که برای یک رأس برشی u از گراف، $r(u)$ یا $l(u)$ باشد.

قضیه ۱.۴. یک گراف خوشه‌انگوری، وترافزایشی است اگر و فقط اگر هر دور آن وترافزایشی باشد و مسیرهای بین هر دو رأس ویژه آن، وترافزایشی باشد.

نتیجه ۲.۴. در زمان $O(n^2 + k^2 n)$ می‌توان وترافزایشی بودن یک گراف خوشه‌انگوری هندسی که n رأس دارد و مجموع تعداد دورها و رأس‌های درجه یک آن، k است را تشخیص داد.

۵ گراف‌های هندسی متعامد

گرافی هندسی که هر یال آن، یک پاره‌خط افقی یا عمودی باشد را یک **گراف هندسی متعامد** گویند. فاصله منهتن بین دو نقطه $p = (p_x, p_y)$ و $q = (q_x, q_y)$ به‌صورت $|p_x - q_x| + |p_y - q_y|$ تعریف می‌شود. یک مسیر هندسی متعامد بین دو نقطه s و t را

یک مسیر **پله‌ای** یا **منهتن** گویند هرگاه مجموع طول یال‌های آن برابر با فاصله منهتن s و t باشد. گراف هندسی متعامد که بین هر دو رأس آن، یک مسیر منهتن وجود دارد را **شبکه منهتن** می‌گویند.

لم ۱.۵. یک مسیر هندسی متعامد، وترافزایشی است اگر و فقط اگر پله‌ای باشد.

با توجه به تعریف شبکه‌های منهتن و لم ۱.۵ یک گراف هندسی متعامد، وترافزایشی است اگر و فقط اگر یک شبکه منهتن باشد.

قضیه ۲.۵. وترافزایشی بودن یک گراف هندسی متعامد با n رأس و m یال را می‌توان در زمان $O(nm)$ تشخیص داد.

برهان. (خلاصه) با توجه به لم ۱.۵ تشخیص وترافزایشی بودن یک مسیر هندسی متعامد که از اتصال دو مسیر هندسی متعامد وترافزایشی به وجود می‌آید، در زمان ثابت قابل بررسی است. با استفاده از این مطلب می‌توان برای یک رأس داده شده s در زمان $O(m)$ همه رئوسی را که بین آنها و s مسیر وترافزایشی وجود دارد، یافت. □

۶ نتیجه‌گیری

مسئله اصلی در بحث گراف‌های هندسی وترافزایشی این است که آیا الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای برای تشخیص وترافزایشی بودن گراف‌های هندسی وجود دارد؟ در جهت حل این مسئله، در این مقاله سعی شده است، چند کلاس ساده از گراف‌ها مورد بررسی قرار گیرند. اما آیا می‌توان وترافزایشی بودن دورهای هندسی را در زمان کمتر از مربعی، تشخیص داد؟ در این‌صورت تشخیص وترافزایشی بودن θ-گراف‌های هندسی نیز در زمان کمتر از مربعی ممکن می‌شود.

مراجع

[1] S. Alamdari, T. M. Chan, E. Grant, A. Lubiw, and V. Pathak. Self-approaching graphs. In Graph Drawing, Lecture Notes in Computer Science 7704, pages 260–271. Springer, 2013

[2] H. R. Dehkordi, F. Frati, and J. Gudmundsson. Increasing-chord graphs on point sets. Journal of Graph Algorithms and Applications 19(2), pages 761-778, 2015.

[3] K. Mastakas and A. Symvonis. On the construction of increasing-chord graphs on convex point sets. In 6th International Conference on Information, Intelligence, Systems and Applications, IISA 2015, pages 1–6. IEEE, 2015.

[4] M. Nöllenburg, R. Prutkin, and I. Rutter. On self-approaching and increasing-chord drawings of 3-connected planar graphs. Journal of Computational Geometry 7, pages 47–69, 2016.