Proceedings of the
47th Annual Iranian Mathematics Conference,
Kharazmi University, Karaj, Iran, 28-31 August 2016

دانشگاه خوارزمی

مجموعه مقالات چهل و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران
دانشگاه خوارزمی، کرج، ۱۰-۷ شهریور ۱۳۹۵

انجمن ریاضی ایران

بررسی و حل مسئله مقدار مرزی و اولیه شامل معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه سوم با روش اسپکترال

همدم کاظمی* و محمد جهانشاهی

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، kazemi.hamdam2@yahoo.com
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، jahanshahi@azaruniv.edu

چکیده

دراین مقاله یک مسئله مقدار مرزی-اولیه شامل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه سوم نسبت به متغیر مکان را درنظر می گیریم. ابتدا با روش اسپکترال مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله کمکی را محاسبه می کنیم سپس با در نظر گرفتن جواب تقریبی جمله خطا را محاسبه می کنیم در نهایت با توجه به شرط $(R, \phi_n) = ۰$ دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی نسبت به ضرایب مجهول بدست می‌آوریم. در نهایت روش حل مسئله را با یک مثال تشریح می کنیم.

واژه‌های کلیدی: روش اسپکترال ،مقدار ویژه، تابع ویژه، مسئله مقدار مرزی-اولیه.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (2010) : 35E99.

۱ مقدمه

روش اسپکترال یکی از تکنیک های مورد استفاده در ریاضیات کاربردی ومحاسبات علمی برای حل معادلات دیفرانسیل معین می باشد که اغلب شامل استفاده از تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس و متغیرهای جدا هستند. روش های اسپکترال را می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی بکار برد. ریاضی دانان از روش های فوق برای حل مسائل مختلف در زمینه‌های گوناگون ریاضی استفاده کرده اند. برای مثال برانو کوستا [۱] در [۱] از روش فوق برای حل مسائل پریودیک خطی و مسائل پریودیک غیر خطی و گوتلیب و هستاون [۲] در [۲] برای حل مسائل هیپربولیک و جکوت [۳] در [۳] برای حل مسائل دو فلزی ترموستاتیک غیر خطی استفاده کرده اند. در این مقاله ما مسئله مقدار مرزی-اولیه شامل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه سوم همراه با شرایط مرزی و اولیه را با این روش حل می‌کنیم.

۲ بیان صورت مسئله و روند محاسبه

در این بخش از روش اسپکترال به محاسبه جواب های تقریبی مسئله مقدار اولیه-مرزی

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = b\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + c\frac{\partial^۳ u}{\partial x^۳} \quad x \in (۰, ۱) \quad t > ۰ \quad c \neq ۰ \tag{۱.۲}$$

*سخنران و مسئول مکاتبات

[۱] Bruno.costa
[۲] D. Gottlieb and J. S. Hesthaven
[۳] T.jecot

که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و با شرایط مرزی

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}|_{x=0} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}|_{x=1}, \quad k = 0, 1, 2 \; t \geq 0 \tag{۲.۲}$$

وشرایط اولیه

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad x \in [0, 1] \tag{۳.۲}$$

خواهیم پرداخت که در آن

$$u \in C^{(3,1)}(D) \bigcap C^{(2,1)}(\bar{D}) \quad D = (0, 1) \times (0, \infty) \tag{۴.۲}$$

با بکار بردن روش جدا پذیر جواب عمومی مسئله مربوط به مکان (مسئله اسپکترال) به‌صورت $X(x) = \sum_{m=1}^{3} A_m e^{\theta_m(\lambda)x}$ خواهد بود و مقادیر ویژه به‌صورت

$$\lambda = \lambda ms = \theta_m^{-1}(2s\pi i) \quad m = 1, 2, 3 \quad s \in \mathbb{Z} \tag{۵.۲}$$

و توابع ویژه مسئله فوق عبارتست از $X_{ps}(x) = \sum_{m=1}^{3} \Delta^{1m}(\lambda_{ps}) e^{\theta m(\lambda_{ps})x} \;\; s \in \mathbb{Z} \;\; p = 1, ..., 3$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی شکل جواب تقریبی به‌صورت

$$U(x, t) = \sum_{q=1}^{3} \sum_{n=-N}^{N} A_{q_n}(t) X_{q_n}(x) + \varphi_0(x) \tag{۶.۲}$$

می باشد که در شرایط مرزی (۲.۲) و شرط اولیه (۳.۲) صدق می‌کند که با جایگذاری جواب تقریبی فوق در معادله دیفرانسیل داریم، R به‌صورت :

$$R = \sum_{q=1}^{3} \sum_{n=-N}^{N} A'_{q_n}(t) X_{q_n}(x) \tag{۷.۲}$$

$$+ a \sum_{q=1}^{3} \sum_{n=-N}^{N} A_{q_n}(t) X' q_n(x) + a\varphi'_0(x) \tag{۸.۲}$$

$$- b \sum_{q=1}^{3} \sum_{n=-N}^{N} A_{q_n}(t) X'' q_n(x) - b\varphi''_0(x) \tag{۹.۲}$$

$$- c \sum_{q=1}^{3} \sum_{n=-N}^{N} A_{q_n}(t) X'''_{q_n}(x) - c\varphi'''_0(x) \tag{۱۰.۲}$$

می باشد. باتوجه به شرط $(R, \phi_n) = 0$ که $\phi_n = \psi_{ps}$ با باز کردن رابطه فوق به دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی نسبت به $A'_{ps}(t)$ می‌رسیم. حال اگر توابع $A_{ps}(t)$ رااز دستگاه فوق با شرط اولیه $A_{ps}(0) = 0$ محاسبه کنیم و در جواب (۴.۲) جایگذاری کنیم، جواب نهایی به‌دست می آید.

مثال ۱.۲. مسئله مقدار مرزی (۱.۲) را با شرایط مرزی و اولیه (۲.۲) و (۳.۲) در نظرمی گیریم و در حالت خاص توابع آزمون را چند جمله ایهای $\{x^n\}$ می گیریم که جواب نهایی به‌صورت زیر خواهد بود

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{N} A_n(t) x^n \tag{۱۱.۲}$$

که در آن ضرایب نا معین $A_n(t)$ از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی زیر بدست می آید.

$$\left\{\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{N-3}[A'_n(t)+a(n+1)A_{n+1}(t)-b(n+2)(n+1)A_{n+2}(t) \\ -c(n+3)(n+2)(n+1)A_{n+3}(t)]\dfrac{1}{n+1+s} \\ +\sum_{N-2}^{N}A'_n(t)\dfrac{1}{n+s+1}+a\sum_{N-2}^{N}(n+1)A_{n+1}(t)\dfrac{1}{n+s+1} \\ -bN(N-1)A_n(t)\dfrac{1}{N-1+s}=0 \quad s\geqslant 0 \\ A_1(t)=-\sum_{n=4}^{N}\dfrac{(n-3)(n-4)}{4}A_n(t) \\ A_2(t)=\sum_{n=4}^{N}\dfrac{n(n-3)}{4}A_n(t) \\ A_3(t)=-\dfrac{1}{3!}\sum_{n=4}^{N}n(n-1)A_n(t) \end{array}\right. \qquad (12.2)$$

که همراه با شرایط اولیه زیر می باشد.

$$A_n(0)=\left\{\begin{array}{ll} \alpha_n & n=0,1,...,m \\ o & n>m. \end{array}\right. \qquad (13.2)$$

مراجع

[1] Bruno Costa,**CUBO** A Mathematical Journal Vol. 6, No 4 , (2004)

[2] D. Gottlieb and J. S. Hesthaven, Spectral Methods for Hyperbolic Problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 128 83-131 . (2001)

[3] T.Joket, Journal of computational and Applied Mathematics, volume 35 Issues1-3,26, pages 251-258T, (1991)

[4] T.Myint.U and Lokenath Debnath,Partial Differential equations for Scientists and Engineers, QA377.T96, (1987)

[5] Lavrance Evance, Partial Differential equations,American Mathematical Society, second Edition, (2010)