Archive of SID

تحلیل بیزی ارزش در معرض خطر توأم با استفاده از مدل‌های رگرسیون خطی و غیرخطی تک شاخصی

علی آقامحمدی[۱*]، میثم سجودی[۲]

[۱] گروه آمار، دانشگاه رنجان، **aghamohammadi.ali@znu.ac.ir**

[۲] کارشناس‌ارشد ریاضیات مالی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، **me.sojoudi@iasbs.ac.ir**

چکیده

معیار ریسک ارزش در معرض خطر یا همان VaR یکی از کاربردی‌ترین معیارهای اندازه‌گیری ریسک در بازارهای مالی است. از آنجایی‌که قیمت یک سهام، وابسته به ارزش شاخص‌های موجود در بازار است، بنابراین استفاده از مدل‌های توصیفی برای مدل‌بندی قیمت سهام برحسب این شاخص‌ها روشی کارا برای برآورد معیار VaR است. اما واضح است که علاوه بر تاثیر این شاخص‌ها، ارزش سهام برخی از شرکت‌ها (شرکت‌های مادر) نیز تا حدود زیادی در بازار اثرگذارند که می‌توانند قیمت سهام شرکت‌های دیگر را تحت تاثیر قرار دهند. به این پدیده در ادبیات مالی "سرایت" گویند. این تاثیرگذاری در سنجش معیار VaR با استفاده از مدل‌های توصیفی معمولا نادیده گرفته می‌شود. در این مقاله برای لحاظ تاثیر این پدیده، معیار ریسک ارزش در معرض خطر توأم (JVaR) معرفی می‌شود. این معیار برای یک سهام، بصورت برآورد معیار VaR خود شرکت به‌علاوه ضریبی از تاثیر ارزش در معرض خطر یک شرکت مادر دیگر تعریف می‌شود. لذا ابتدا VaR یک شرکت تأثیرگذار به‌کمک یک مدل رگرسیونی چندکی خطی مدل‌بندی شده و پارامترهای مجهول مدل رگرسیونی، به‌روش آمار بیزی برآورد می‌شوند. در ادامه نیز به‌منظور افزایش کارایی مدل، از یک مدل رگرسیونی چندکی غیرخطی تک شاخصی استفاده می‌شود. در پایان با لحاظ کردن معیار VaR شرکت، معیار JVaR برای هر سهام دلخواه برآورد می‌شود.

کلمات کلیدی: ارزش در معرض خطر توأم، مدل رگرسیون چندکی خطی ، مدل رگرسیون چندکی غیرخطی تک شاخصی، آمار بیزی

طبقه بندی موضوعی: ۹۱B۳۰، ۹۱G۱۰.

۱ مقدمه ریسک‌های بسیاری، سرمایه‌گذاران در بازارهای بورس را تهدید می‌کنند و خطر از دست رفتن سرمایه، همواره یکی از نگرانی‌های آنان است. بنابراین آنها به‌دنبال ابزاری هستند تا بتوانند ریسک‌های ناشی از سرمایه‌گذاری‌های خود را مدیریت کنند. در این مقاله برای مدیریت ریسک یک سرمایه‌گذاری، استفاده از معیارهای VaR و JVaR پیشنهاد می‌شود.

۲ برآورد معیارهای VaR و JVaR با استفاده از مدل رگرسیون چندکی خطی زمان-ثابت

می‌دانیم که معیار VaR درواقع چندک مشخصی از یک متغیر تصادفی است[۱]. بنابراین استفاده از یک مدل رگرسیون چندکی خطی برای برآورد آن، ایده مناسبی است که توسط بسیاری از محققان ارایه شده‌است [۴]. فرض کنید $y_{j,t}$ و $y_{k,t}$ به‌ترتیب قیمت سهام شرکت‌های j-ام و k-ام در لحظه t باشند. ابتدا معیار VaR را برای قیمت سهام شرکت j-ام برآورد کرده و سپس با استفاده از آن، معیار JVaR برای قیمت سهام شرکت k-ام که تاثیر VaR شرکت j-ام نیز در آن لحاظ شده‌است، برآورد می‌شود. بنابراین مدل‌های خطی

---

* علی آقامحمدی

www.SID.ir

Archive of SID

$$y_{j,t} = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_j + \varepsilon_{j,t} \quad (۱,۲)$$

$$y_{k,t} = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_k + \beta\, y_{j,t} + \varepsilon_{k,t} \quad (۲,۲)$$

را برای پیش‌بینی قیمت سهام این دو شرکت که در آنها بردار $\mathbf{x}_t$ ارزش شاخص‌های موجود در بازار در لحظه t هستند، در نظر می‌گیریم. در مدل‌های (۱,۲) و (۲,۲) $\varepsilon_{j,t}$ و $\varepsilon_{k,t}$ مؤلفه‌های خطا هستند. پارامترهای مجهول $\boldsymbol{\theta}_l$ و β به‌ازای $l \in \{j,k\}$ و $m = 0,\ldots,M$ با استفاده از روش آمار بیزی برآورد می‌شوند. توجه کنیم که در رابطه (۲,۲)، پارامتر β همان اندازه تاثیر قیمت سهام شرکت j-ام (به‌عنوان شرکت مادر) را بر قیمت سهام شرکت k-ام مشخص می‌کند.

از آنجاییکه هدف استفاده از رگرسیون چندکی برای تخمین VaR و JVaR است، به پیروی از یو و مویید (۲۰۰۱)، توزیع لاپلاس نامتقارن را برای خطاها درنظر می‌گیریم[۳]. بنابراین معادلات (۱,۲) و (۲,۲) تحت این توزیع بصورت

$$y_{j,t} = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_j + \lambda\omega_{j,t} + \delta\sqrt{\sigma_j\omega_{j,t}}\,z_{j,t}$$

$$y_{k,t} = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_k + \beta\, y_{j,t} + \lambda\omega_{k,t} + \delta\sqrt{\sigma_k\omega_{k,t}}\,z_{k,t}$$

بازنویسی می‌شوند که در آن $l \in \{j,k\}$، $z_{l,t} \sim N(0,1)$ و $\omega_{l,t} \sim \exp(\sigma_l^{-1})$ و $\lambda = \frac{1-2\tau}{\tau(1-\tau)}$ و $\delta^2 = \frac{2}{\tau(1-\tau)}$ و τنیز همان اندازه چندک متغیرهای $y_{j,t}$ و $y_{k,t}$ است. توجه شود در هر دو مدل فرض می‌شود که چندک τام $\varepsilon_{j,t}$ و $\varepsilon_{k,t}$ برابر صفر است. چون هدف، برآورد پارامترهای مجهول روابط فوق به کمک آمار بیزی است، لذا توزیع‌های پیشینی بردار پارامترهای مجهول را بصورت $\pi(\boldsymbol{\gamma}) = \pi(\boldsymbol{\theta})\pi(\beta)\pi(\sigma_j)\pi(\sigma_k)$ درنظر می‌گیریم. معمولا در آمار بیزی از توزیع‌های پیشینی مزدوج استفاده می‌شود، لذا برای پارامترهای بردار $\pi(\boldsymbol{\gamma})$ توزیع‌های پیشینی مزدوج بصورت $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\theta}_k)' \sim N_{(2M+2)}(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Sigma}^0)$، $\beta \sim N(\beta^0, \sigma_\beta^2)$ و $\sigma_j \sim IG(a_j^0, b_j^0)$ $\sigma_k \sim IG(a_k^0, b_k^0)$ در نظر گرفته می‌شوند[۵]. می‌دانیم در آمار بیزی کلیه استنباط‌ها بر اساس توزیع‌های پسینی پارامترها انجام می‌شود. چون در مدل‌های روابط (۱,۲) و (۲,۲) توزیع‌های پسینی بصورت بسته قابل محاسبه نیستند از روش‌های مونت‌کارلو از جمله روش نمونه‌گیری گیبس برای استنباط استفاده شده است. برای برآورد آنها ۲۰۰۰۰مرتبه شبیه‌سازی مونت‌کارلو تکرار کرده و ۱۰۰۰۰ تکرار اول را به عنوان دوره همگرایی کنار گذاشته و معیارهای VaR و JVaR بر اساس ۱۰۰۰۰ تکرار نهایی بصورت زیر تقریب می‌شوند

$$\mathrm{VaR}_j^{x,\tau} = \frac{1}{10000}\sum_{g=1}^{10000}\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_j^{(g)}$$

$$\mathrm{JVaR}_{k|j}^{x,\tau} = \frac{1}{10000}\sum_{g=1}^{10000}(\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_k^{(g)} + \beta^{(g)}\mathrm{VaR}_j^{x,\tau})$$

www.SID.ir

Archive of SID

۳ برآورد معیارهای VaR و JVaR با استفاده از مدل رگرسیون چندکی غیرخطی تک‌شاخصی زمان- متغیر

قیمت سهام شرکت‌های j-ام و k-ام در مدل غیرخطی بصورت

$$y_{j,t} = \eta_{j,t}(\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_j) + \lambda_j \omega_{j,t} + \delta_j \sqrt{\sigma_j \omega_{j,t}}\, z_{j,t} \qquad (۱,۳)$$

$$y_{k,t} = \eta_{k,t}(\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_k) + \beta\, y_{j,t} + \lambda_k \omega_{k,t} + \delta_k \sqrt{\sigma_k \omega_{k,t}}\, z_{k,t} \qquad (۲,۳)$$

مدل‌بندی می‌شوند که در آن تابع $\eta(.)$ مولفه غیرخطی بودن مدل را توصیف می‌کند. در مدل (۲,۳)، پارامتر β_t که میزان تاثیر قیمت سهام شرکت j-ام را بر قیمت سهام شرکت k-ام مشخص می‌کند، در طول زمان تغییر کرده و بصورت

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \beta_t^* + \eta_{\beta,t} \qquad \text{s.t.} \qquad \beta_{t+1}^* = \beta_t^* + \eta_{\beta,t}^*$$

مدل می‌شود که در آن $(\beta_1, \beta_1^*)' \sim N_2(\mathbf{0}, \kappa \mathbf{I}_2)$، $(\eta_{\beta,t}, \eta_{\beta,t}^*)' \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{S}_\beta)$ با فرض $\mathbf{S}_\beta = s_\beta^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $s_\beta > 0$ است که منظور از s_β درجه هموارى در رگرسیون چندکی است و $\kappa \to \infty$ [۲].

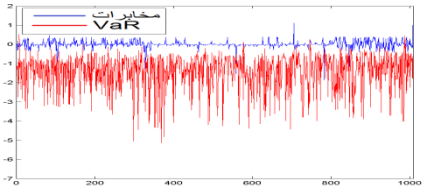
در مدل‌های (۱,۳) و (۲,۳)، با توجه به اینکه رفتار تابع $\eta_{l,t}$ به‌ازای $l \in \{j,k\}$ مشخص نیست، یک روش مدل کردن آن استفاده از فرآیند گاوسی* است که در این مقاله از آن استفاده شده است[۶]. در این مدل معیارهای VaR و JVaR بصورت زیر تقریب می‌شوند

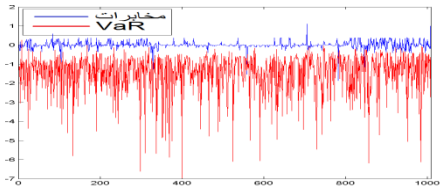
$$\mathrm{VaR}_j^{x,\tau} = \frac{1}{10000} \sum_{g=1}^{10000} \boldsymbol{\eta}_j^{(g)}(\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_j^{(g)})$$

$$\mathrm{JVaR}_{k|j}^{x,\tau} = \frac{1}{10000} \sum_{g=1}^{10000} (\boldsymbol{\eta}_k^{(g)}(\mathbf{x}_t'\boldsymbol{\theta}_k^{(g)}) + \beta_t^{(g)}\, \mathrm{VaR}_j^{x,\tau}))$$

۴ تحلیل داده‌های بازار سهام ایران

در این بخش ابتدا با استفاده از دو مدل رگرسیون چندکی غیرخطی زمان- متغیر و خطی زمان- ثابت، معیار VaR را برای سهام شرکت مخابرات ایران برآورد کرده و در ادامه معیار JVaR برای سهام بانک ملت ایران برآورد می‌شود. داده‌های این سهام از تاریخ سوم مهر ماه سال ۱۳۹۱ تا سوم مهر ماه سال ۱۳۹۳ است که از دو متغیر توصیفی شاخص کل و شاخص صنعت نیز به‌عنوان متغیرهای توصیفی استفاده شده است. شکل‌های زیر مقادیر برآورد شده معیارهای VaR را برای لگاریتم بازده قیمت سهام شرکت مخابرات ایران و JVaR را برای لگاریتم بازده قیمت سهام بانک ملت ایران نشان می‌دهد.

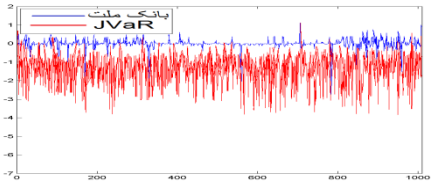




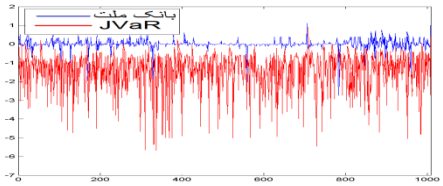
www.SID.ir

Archive of SID

رگرسیون غیرخطی زمان- متغیر



رگرسیون خطی زمان- ثابت



برای مقایسه کارایی عملکرد مدل‌های فوق از معیار ، از معیار تخطی از واقعیت* استفاده می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{VRate}=\frac{1}{M}\sum_{t=1}^{M} I(y_t > \mathrm{VaR}_{y_t})$$

می‌دانیم که برای مقدار مشخص τ، هرچه مقدار $\frac{\mathrm{VRate}}{1-\tau}$ در یک مدل به عدد یک نزدیک‌تر باشد، کارایی مدل در برآورد معیارهای VaR و JVaR بیشتر است.

مقدار $\frac{\mathrm{VRate}}{1-\tau}$ برای VaR و JVaR شرکت مخابرات و بانک ملت به‌ازای $\tau = 0/025$

معیار ریسک / مدل	VaR شرکت مخابرات	JVaR بانک ملت
رگرسیون چندکی خطی زمان- ثابت	1/91	1/37
رگرسیون چندکی غیرخطی زمان- متغیر	1/15	1/07

همان‌طور که از جدول مشخص است برای هر دو معیار روش رگرسیون چندکی غیرخطی زمان- متغیر، روشی کارا است.

*** Violation Event**

www.SID.ir

Archive of SID

۵ نتایج اساسی

تغییرات قیمت یک سهام، علاوه بر شاخص‌های بازار، به قیمت سهام مهم دیگر نیز وابسته است. بنابراین درنظر گرفتن تاثیرات سهام مهم بر ریسک سهام سایر شرکت‌ها، امری اجتناب‌ناپذیر است. در همین راستا در این مقاله، معیار جدید ریسک با عنوان JVaR معرفی شده و با استفاده از دو مدل رگرسیون چندکی خطی زمان- ثابت و غیرخطی زمان- متغیر و با استفاده از آمار بیزی، روشی برای برآورد آن ارایه شد. در ادامه این معیار ریسک برای یک شرکت از بازار سهام ایران برآورد شد که نتایج حاکی از کارایی مدل رگرسیون چندکی غیرخطی زمان- متغیر و معیار JVaR است.

مرجع‌ها

1. A. J. McNeil, R. Frey, Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series An extreme value approach., Empirical Finance., (2000), pp. 271-300.
2. J. Durbin, S.J. Koopman, Time Series Analysis by State Space Methods., Oxford University Press, 2012.
3. K. Yu, R. Moyeed, ayesian quantile regression}. Statistics and Probability Letters., (2001), pp. 437-447.
4. M. Bernardi, G. Gayraud, L. Petrella, Bayesian inference for CoVaR, 2013.
5. S.T. Tokdar, J.B. Kadane, Using exponentially weighted quantile regression to estimate value at risk and expected shortfall,. Journal of Financial Econometrics., (2008), pp. 382-406.
6. Y. Hu, R. Gramacy, H. Lian, Bayesian quantile regression for single-index models., Stat Comput., (2013), pp. 437–454.

www.SID.ir