معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو در ارزش‌گذاری مشتقات مالی

آزاده قاسمی فرد[1*]، دکتر محمدتقی جهاندیده[2]

[1] **azadeh.ghasemi@math.iut.ac.ir** (دانشجوی دکتری ریاضیات مالی - دانشگاه صنعتی اصفهان)

[2] **jahandid@cc.iut.ac.ir** (عضو هیئت علمی - دانشگاه صنعتی اصفهان)

چکیده: معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو چیست و چه جایگاهی در ارزش‌گذاری مشتقات مالی در یک بازار کامل با مدل‌های پیوسته دارد؟ در این مقاله در نظر داریم به پرسش فوق پاسخ دهیم. مسئله‌ی ارزش‌گذاری مشتقات مالی یکی از مهمترین موضوعاتی است که پژوهشگران مالی همواره و از دیدگاه‌های مختلف به بررسی آن پرداخته‌اند؛ در این میان قالب معادلات پسرو با ویژگی‌ها و نقاط قوت و ضعف مختص به خود یکی از میادین چالش برانگیز می‌باشد که نظر متخصصان بسیاری را به خود جلب کرده است. لذا در این نوشتار سعی داریم به زبان ساده به معرفی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو پرداخته و از این دیدگاه ارزش‌گذاری مشتقات مالی را بررسی کنیم.

کلمات کلیدی: معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو، ارزش‌گذاری مشتقات مالی، سبد سرمایه‌ی پوششی، بازار کامل.

طبقه بندی موضوعی: 91G80 , 65C30 (طبقه‌بندی AMS)

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو (BSDE) اولین بار در سال ۱۹۷۳ به وسیله‌ی بیسموت در حالت خطی معرفی شده و پس از آن در سال ۱۹۹۰ به وسیله پردوکس و پنگ به حالت پیوسته‌ی لیپ‌شیتس تعمیم یافتند. بر اساس تعریف آن‌ها جواب یک BSDE از یک زوج از فرآیندهای تصادفی سازوار $(Y\ ,Z\ )$ تشکیل شده است که در معادله‌ی

$$-dY_t = f\ (t,Y_t,Z_t)dt - Z_t^{*}dW_t; \qquad Y_T = \xi,$$

صدق می‌کنند. f را تابع مولد و ξ را شرط پایانی می‌نامند و در آن W_t یک حرکت براونی است (* نماد ترانهاده می‌باشد). در واقع یک BSDE حالت خاصی از یک SDE می‌باشد با این تفاوت که در این حالت به جای شرط مرزی اولیه، در یک شرط پایانی صدق می‌کند و جواب آن به جای یک فرآیند تصادفی سازوار از یک زوج فرآیند تشکیل شده است. چنین معادلاتی در مسائل گوناگونی در علوم مالی ظاهر می‌شوند که ما به مسئله‌ی ارزش‌گذاری مشتقات مالی می‌پردازیم. ارزش‌گذاری مشتق مالی در یک بازار کامل که در سال ۱۹۷۳ توسط بلک و شولز و مرتون مطالعه شد در قالب BSDE قابل بیان

---

[*] سخنران

می‌باشد، به این صورت که اگر $0 \geq \xi$ بازدهی یک مشتق مالی با تاریخ انقضای T باشد، در یک بازار کامل می‌توان سبد سرمایه‌ای متشکل از دارایی‌های پایه‌ی مشتق مالی به گونه‌ای بازتولید کرد که ارزش آن در لحظه‌ی T برابر با ξ باشد. بنابراین دینامیک سبد سرمایه‌ی پوششی Y به وسیله یک BSDE با مولد خطی f بیان می‌شود که در آن Z مطابق با استراتژی پوششی در سبد سرمایه است و ارزش مشتق مالی در لحظه‌ی t برابر با ارزش سبد سرمایه‌ی پوششی در همان لحظه می‌باشد. در حقیقت تعداد نامتناهی از این سبد سرمایه‌های پوششی وجود دارد که در این‌صورت ارزش مشتق مالی خوش تعریف نخواهد بود، ولی با استفاده از نظریه‌ی ارزش‌گذاری بدون آربیتراژ، محدودیت‌هایی بر انتگرال‌پذیری استراتژی‌های پوششی تحت یک اندازه‌ی ریسک خنثی اعمال می‌شود. با استفاده از نظریه‌ی BSDE نشان داده می‌شود که مسئله‌ی ارزش‌گذاری یک مسئله‌ی خوش تعریف است؛ یعنی با در نظر گرفتن شرط مربع انتگرال‌پذیری تحت اندازه‌ی احتمال اولیه - و نه ریسک خنثی – یک سبد سرمایه‌ی پوششی منحصر به فرد و در نتیجه یک ارزش منحصر به فرد برای مشتق مالی به دست می‌آید.

۱,۱ نقاط قوت و ضعف استفاده از BSDE

رویکرد BSDE در شاخه‌ی ریاضی مالی در مقایسه با SDE کلاسیک مزایایی دارد. بسیاری از مدل‌های مربوط به بازارهای مالی مانند بلک – شولز، تلاطم تصادفی و مدل‌های پرش – دیفیوژنی و ...، در فرمت BSDE قابل بیان هستند. همچنین ویژگی‌های نامطلوب بازار مانند نرخ بهره‌ی متفاوت برای قرض گرفتن و قرض دادن[۵]، وجود هزینه‌های معامله‌ای [۸] نیز در این قالب قابل بیان می‌باشند که آن را به یک نظریه‌ی انعطاف پذیر در مدل‌سازی‌های مالی تبدیل می‌کند. از مزایای دیگر این روش این است که در این رویکرد، نیازی به در نظر گرفتن اندازه‌ی ریسک خنثی در ارزش‌گذاری نیست و همچنین می‌توان آن را برای بازارهای غیر کامل نیز به کار برد. در پایان اینکه جواب‌های BSDE با جواب‌های رده‌ی خاصی از PDE در ارتباط هستند؛ به این معنا که اگر ما بتوانیم جواب یک PDE را تقریب بزنیم می‌توانیم تخمینی از جواب BSDE مرتبط با آن را نیز به دست آوریم و برعکس.

کاربرد BSDE البته دارای مشکلاتی نیز می‌باشد. در BSDE شرط مرزی، یک شرط پایانی است و ما نمی‌توانیم در زمان به عقب حرکت کنیم، در واقع مطلوب است که جواب BSDE وابسته به اطلاعات آینده نباشد، چرا که ما از آن اطلاعی در دست نداریم. در عمل جواب یک BSDE باید نسبت به پالایه‌ای که با آن کار می‌کنیم سازوار باشد، به همین دلیل جواب از دو قسمت (Y_t, Z_t) تشکیل شده است؛ Z_t فرآیند کنترل نام دارد و Y_t را به سمت شرط پایانی هدایت می‌کند. مشکل دیگری که در مسیر کاربرد BSDE وجود دارد این است که قضایای زیادی برای وجود جواب و یکتایی آن‌ها وجود ندارد و البته این مدل‌ها روز به روز در حال گسترش هستند.

۲ ارزش‌گذاری و پوشش ریسک مشتقات مالی

فرض کنید سبد سرمایه‌ای شامل n دارایی پایه‌ی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک با دینامیک $dS_t^0 = S_t^0 r_t dt, \quad dS_t^i = S_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{i,j} dW_t^j \right], i = 1, \ldots, n.$ در دست باشد که $W = (W^1, \ldots, W^n)^*$ یک حرکت براونی استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ و در فضای احتمال (Ω, F, P) است. همچنین فرض کنید فرآیندهای r, σ, μ کراندار و نسبت به پالایه‌ی حرکت براونی قابل پیش‌بینی باشند و $\mu_t - r_t 1 = \sigma_t \theta_t$، که فرآیند کراندار θ حق بیمه‌ی ریسک نام دارد و r_t فرآیند نرخ بهره‌ی کوتاه‌مدت و σ_t ماتریس وارون‌پذیر تلاطم هستند؛ تحت مفروضات فوق بازار کامل است. فردی با سرمایه‌ی V_t در نظر بگیرید که در لحظه‌ی $t \in [0,T]$ می‌تواند مقدار π_t^i را در دارایی iام سرمایه‌گذاری کند. فرض می‌کنیم استراتژی (V, π) خودتامین باشد یعنی سرمایه‌ی

$V = \sum_{i=0}^{n} \pi^i \geq 0$، در $V_t = V_0 + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}$ و یا SDE معادل

$$
\begin{aligned}
dV_t &= r_t V_t dt + \pi_t^* (\mu_t - r_t 1) dt + \pi_t^* \sigma_t dW_t \\
&= r_t V_t dt + \pi_t^* \sigma_t [dW_t + \theta_t dt].
\end{aligned}
$$

که $\int_0^T \left| \pi_t^* \sigma_t \right| dt < \infty, P - a.s.$، صدق کند. اکنون یک مشتق مالی با بازدهی ξ وتاریخ انقضای T در نظر بگیرید؛ استراتژی خودتامین (V, π) برای مشتق مالی، پوششی نامیده می‌شود هرگاه $V_T = \xi$.

قضیه فرض کنید بازار کامل باشد و ξ یک متغیر تصادفی مثبت و مربع انتگرال‌پذیر باشد که نشان دهنده‌ی بازدهی یک مشتق مالی است و دارایی‌های پایه در مدل مفروض صدق کنند. استراتژی پوششی (X, π) برای ξ وجود دارد به طوریکه در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو $dX_t = r_t X_t dt + \pi_t^* \sigma_t \theta_t dt + \pi_t^* \sigma_t dW_t, \; X_T = \xi,$ صدق می‌کند و در این حالت ارزش بازاری

X، همان ارزش منصفانه* یعنی کمترین سرمایه‌ی موردنیاز برای پوشش ξ می‌باشد. همچنین اگر $(H_s^t; s \geq t)$ عامل تنزیل باشد به طوریکه $H_t^t = 1$، $dH_s^t = -H_s^t[r_s ds + \theta_s^* dW_s]$، آنگاه

$$X_t = E\left[H_T^t \xi \middle| F_t\right], \; a.s.$$

توجه شود که از رابطه‌ی اخیر و شرط $(V_t, 0 \leq t < T) > 0$ ثابت می‌شود که تحت این مدل در بازار آربیتراژ وجود ندارد و استراتژی پوششی منحصر به فرد است. اثبات در[۴].

مطالبی که در این مقاله فرصت پرداختن به آن‌ها دست نداد عبارتند از قضایای وجود و یکتایی جواب BSDE ، روش‌های حل عددی آن‌ها و ارائه‌ی مثال و الگوریتم در ارزش‌گذاری مشتقات مالی. قابل توجه است که رویکرد معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو در مسئله‌ی ارزش‌گذاری مشتقات مالی، قابل تعمیم به حالت ناپیوسته و مدل‌های به همراه پرش نیز می‌باشد که این مباحث خود زمینه‌ای برای مطالعات آینده فراهم می‌سازد.

مرجع‌ها

1. J. M. BISMUT, Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control, J. Math. Anal. Appl., 44, (1973), 384–404.

2. F. BLACK, M. SCHOLES, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, J. Political Econ., 3,(1973), 637–654.

3. P. Briand,Y. Hu, BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value. Probab. Theory Related Fields 136, no. 4, (2006).

4. N. EL KAROUI, S. PENG, M. C. QUENEZ, Backward Stochastic Differential Equations In Finance, Mathematical Finance, Vol. 7, No. 1,(January 1997), 1–71.

5. E. Gobet, Numerics of Backward SDEs, Summer School in Probability Theory, (July 2010).

*** Fair Price**

6. R. MERTON, Theory of Rational Option Pricing, Bell J. Econ. Manage. Sci., 4, (1973), 141–183.

7. E. PARDOUX, S. PENG, Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation, Systems Control Lett., 14,(1990), 55–61.

8. M. Schroder, C. Skiadas. Optimality and state pricing in constrained financial markets with recursive utility under continuous and discontinuous information. Mathematical Finance, 18(2), (2008), 199-238.