Archive of SID

بررسی مدل‌های مختلف معادلات دیفرانسیل تصادفی در قیمت گذاری و پیش بینی آتی بازارهای نفت

پریسا نباتی[۱]، معصومه عزیزی[۲*]

[۱] ارومیه، دانشگاه صنعتی ارومیه، دانشکده علوم پایه

p.nabati@uut.ac.ir

[۲] ارومیه، دانشگاه صنعتی ارومیه، دانشکده علوم پایه

masoumeh.azizi@sci.uut.ac.ir

چکیده: از آنجایی که نفت یکی از مهم‌ترین محصولات جهان است به‌دست آوردن بهترین مدل ریاضی برای توصیف پویایی قیمت نفت از اهمیت بسزایی برخوردار است. معادلات دیفرانسیل تصادفی جزء بهترین مدل‌ها برای تعیین قیمت نفت هستند که به علت داشتن عامل تصادفی می‌توانند تاثیر عوامل مختلف اقتصادی و سیاسی را در مدل لحاظ کنند. در این مقاله ۱۱ مدل مختلف معادله دیفرانسیل تصادفی تک عاملی را برای به تصویر کشیدن رفتار قیمت نفت خام اپک مورد بررسی قرار می‌دهیم و با شبیه سازی از طریق نرم‌افزار متلب بهترین مدل را با توجه به نمودار قیمت‌ها به‌دست می آوریم.

کلمات کلیدی: حرکت براونی هندسی، معادلات دیفرانسیل تصادفی، برآورد پارامتر، مشتقات، اختیارات

طبقه بندی موضوعی: 65C20, 65C30, 60G15 .

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر مشتقات مالی مانند آتی ها و اختیارات از ارزش قابل توجهی در موسسات مالی به منظور مدیریت تجارت و ریسک، برخوردار شدند. موفقیت این موسسات به صورت عمده وابسته به قیمت‌گذاری دقیق مشتقات به منظور ایجاد سبدهای سرمایه‌گذاری موفق و استراتژی‌های سرمایه‌گذاری است. در دو دهه اخیر رفتار قیمت‌های نفت با فاکتورهای زیادی مثل نرخ‌های بهره،

---

* سخنران

www.SID.ir

Archive of SID

جنگ‌های خاورمیانه و بحران‌های اقتصادی پیچیده‌تر شده است. مدل‌های تک عاملی جزء بهترین مدل‌ها برای توصیف پویایی قیمت‌های نفت هستند. در این مقاله مدل‌های تک عاملی موجود را مورد بررسی قرار می‌دهیم و بهترین مدل را برای توصیف پویایی قیمت نفت به‌دست می‌آوریم.

تمام مدل‌هایی که در نظر گرفته می‌شوند به شکل $dP = A(P,t)dt + B(P,t)dZ$ هستند که P(t) قیمت نفت در زمان t، $A(P,t)$ ضریب پخش، $B(P,t)$ ضریب انتشار و dZ یک فرایند وینر استاندارد با اندازه احتمال واقعی P است.

ساده‌ترین مدل تک عاملی، حرکت براونی هندسی (GBM) است که در آن $A(P,t) = \mu P$، $B(P,t) = \sigma P$ و μ و σ ثابت هستند. بر اساس این مدل برنان و شوارتز روابط بین قیمت‌های آنی و قیمت-های آتی محصولات را یافتند[8] . در این مدل نرخ بهره و تسهیلات محصولات ثابت و شناخته شده در نظر گرفته می‌شوند. گابیلو راه حل فرم بسته‌ای را با این فرض که قیمت‌های آتی نفت تنها به قیمت‌های آنی نفت و هزینه‌های حمل و نقل فیزیکی نفت بستگی دارد به‌دست آورد[5]. وی مشاهده کرد که واژه ساختار در جریمه دیرکرد نمی تواند با این فرمول توصیف شود به همین علت فرمولش را با فرض اینکه کواریانس تسهیلات محصولات در قیمت های آتی موثرند گسترش داد. تحت این فرض گابیلون فرمولی برای قیمت های آتی بدست آورد که می توانست جریمه و بهره دیرکرد را توصیف کند. او مشاهده کرد زمانی که جریمه دیرکرد به بهره دیرکرد تغییر می‌یابد و بالعکس یک ناپیوستگی وجود دارد و استفاده از مدل GBM برای ارزیابی مشتقات مالی می توانست منجر به ارزش گذاری غیرمعقول شود. بیجرکساوند و اکرن مقادیر اختیار اروپایی را در صورتی که قیمت آنی از فرایند ارنشتاین- آهلنبگ پیروی می کنند به دست آوردند[10]. با این حال یکی از معایب این روش این است که می تواند قیمت‌های منفی تولید کند. به زودی اشوارتزیک راه حل تحلیلی برای قیمت های آتی به‌دست آورد که در آن قیمت آنی ازمدل میانگین بازگشت $dP = \eta P(\mu - \ln(P))dt + \sigma dZ$ پیروی می کند[2]. این مدل معروفترین مدل تک عاملی می باشد و توسط نویسندگان مختلفی استفاده شده است. برای مثال اسکورودومو قیمت های آنی نفت را تحت مدل شوارتز تجزیه و تحلیل کرد و مدل مختلفی برای میانگین بازگشت به دست آورد[1].

بسط‌های مختلفی برای مدل‌های تک عاملی یافت شده‌اند که شامل مدل‌های دوعاملی و سه عاملی می باشند[2,3,6,4]. این مدل‌ها بطور بالقوه می توانند قیمت‌های مشتقات را توضیح دهند. مشکل بسیاری از این مدل‌ها این است که متغیرهای حالتی مثل تسهیلات محصول به طور مستقیم قابل مشاهده نیستند و بنابراین تخمین زده می شوند لذا بسیاری از این مدلها تضمین نمی کنند که بازده محصولات همواره مثبت اند بنابراین فرصت آربیتراژ ایجاد می‌شود . ضعف اصلی توسعه به مدل‌های چند عاملی رشد تعداد پارامترها برای تخمین می باشد ودر بسیاری از موارد به راه‌حل های تحلیلی نیاز دارند.

بسط دیگر برای مدل‌های توزیع تک عاملی مدلهای توزیع جهش می باشد که تلاش می کند تغییرات غیر منتظره مثل جنگ ها و اعتصاب ها را تاسیس کند[9]. این مدل‌ها چندین مشکل عملیاتی ازجمله تخمین و براورد چندین پارامتر و نیاز به وقایع نادر و بزرگ دارند که ممکن است به سختی بررسی شوند. مشکل دیگر عدم امکان ساخت یک ریسک است که باعث می شود تجزیه و تحلیل مطالبات موکول به آینده غیرممکن شود.

www.SID.ir

Archive of SID

یکی از اهداف اصلی این مقاله تست بسیاری از مدل‌های تک عاملی معروف است. مدل‌های پیشنهاد شده اخیر که به فرم زیر

$$dP = (a\sqrt{P} + bP)dt + \sigma P^{3/4}dZ \qquad (1,1)$$

هستند ، می توانند رفتار قیمت نفت خام را توصیف کنند. فرمول (۱,۱) با $b<0$ مدل میانگین بازگشت با نرخ بازگشت وابسته به سطح قیمت را توصیف می کند همچنین توان ۳/۴ درزمان نفوذ می تواند نوسانات قیمت را کاهش دهد.

در این مقاله ابتدا مدلهای مختلف معادلات دیفرانسیل تصادفی موجود برای قیمت گذاری نفت را مورد بررسی قرار می‌دهیم، سپس با استفاده از شبیه سازی کامپیوتری با نرم افزار متلب و با توجه به نمودار داده های نفت اپک بین سالهای ۲۰۰۳-۲۰۰۶ بهترین مدل را به دست می‌آوریم.

۲ مدل ریاضی

در جدول زیر لیست ۱۱مدل تصادفی به فرم (۱.۱) آورده شده است که تواناییشان برای تناسب با قیمت‌های نفت اپک مورد بررسی قرار گرفته است[7]. مدل‌های ۱-۸ برخی از معروفترین مدل‌های تک عاملی می باشند. مدل۱ حرکت براونی هندسی با نرخ رشد مورد انتظارμ و انحراف معیار استاندارد σ می باشد. این مدل فرض می کند که درصد تغییرات مورد انتظار درقیمت‌ها و درصد تغییرات نوسانات در قیمت‌ها ثابت می باشد.

مدل ۲و ۳ یک فرایند میانگین بازگشت می باشند. زمان انحراف مدل ۳ مانند مدل ۲ می باشد اما برخلاف مدل ۲ فرض می کند که نوسانات آنی درصد تغییرات در قیمت‌ها ثابتند. مدل ۴ فرض می کند که لگاریتم قیمت‌ها از فرایند میانگین بازگشت پیروی می کند. مدلهای ۵-۷ زمان انحراف مشابهی دارند که نرخ بازگشت تعیین شده توسط ηP یک تابع خطی از P است. این می تواند یک اثر متعادل از یک میانگین بازگشت قوی تری برای سطح بالاتری از P تضمین کند. مدل۸ برای ارزیابی نوسانات به کار می رود تحت این مدل هستون قیمت اختیار اروپایی را تعیین کرد. مدل های ۹-۱۱ مدل های پیشنهاد شده جدید می باشند که با زمان انتشار $\sigma P^{3/4}$ می توانند نوسانات قیمت نفت را کاهش دهند.

	زمان پخش	زمان انتشار
مدل ۱	μP	σP
مدل ۲	$\eta(\mu - P)$	σ
مدل۳	$\eta(\mu - P)$	σP
مدل۴	$\eta P(\mu - \ln(P))$	σP
مدل ۵	$\eta P(\mu - P)$	σ

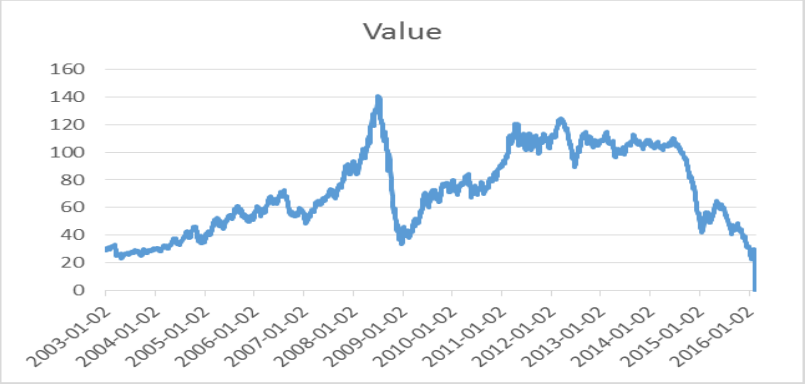
www.SID.ir

Archive of SID

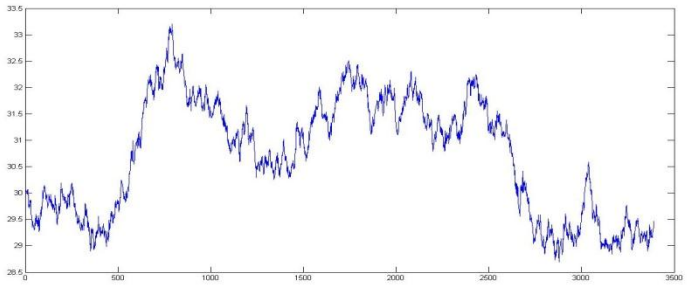
مدل ۶	$\eta P(\mu - P)$	σP
مدل ۷	$\eta P(\mu - P)$	$\sigma P^{3/2}$
مدل ۸	$\eta(\mu - P)$	$\sigma\sqrt{P}$
مدل ۹	aP	$\sigma P^{3/4}$
مدل ۱۰	$a\sqrt{P}$	$\sigma P^{3/4}$
مدل ۱۱	$a\sqrt{P} + bP$	$\sigma P^{3/4}$

۳ شبیه‌سازی عددی

در این قسمت کارایی مدل‌های ذکر شده را در مدل‌سازی قیمت نفت اپک در سال‌های ۲۰۰۳-۲۰۰۶ مورد بررسی قرار می‌دهیم. به منظور شبیه‌سازی عددی مدلهای مذکور، ابتدا با استفاده از روش عددی اویلر ماریاما مدل‌های فوق را گسسته نموده و سپس با استفاده از نرم افزار متلب نمودار داده‌ها را رسم نموده‌ایم. با مقایسه‌ی نمودار مربوط به داده های نفت (شکل ۱) با نمودار مدل‌های ۱-۱۱ بهترین مدل جهت پیش بینی و برآورد قیمت نفت مدل ۸ می‌باشد (شکل ۲).



شکل ۱: قیمت نفت اپک در سال‌های ۲۰۰۳-۲۰۰۶



شکل ۲: نمودار مدل ۸

4 نتیجه گیری

www.SID.ir

Archive of SID

از آنجایی که برآورد پارامترهای مدل های مذکور از اهمیت به سزایی برخوردار است، تخمین پارامترهای مدل با داده های نفت اپک و شبیه سازی عددی آن از اهداف آتی این مقاله می باشد.

مرجع‌ها

1. B. B. Skorodumov, Estimation of mean reversion in oil and gas markets, Technical report, MITSUI/2008-10-14.
2. E. Schwartz, The stochastic behavior of commodity prices implications for valuation and hedging. The journal of finance, 1997, 52: 923–973.
3. E. Schwartz, J. Smith, Short-Term variations and Long-Term dynamics in commodity prices. Management Science, 2000, 46: 893-911.
4. G. Cortazar, E. S. Schwartz, Implementing a stochastic model for oil futures prices, Energy Economics, 2003, 215–238.
5. J. Gabillon, The term structures of oil futures prices, Oxford institute for energy studies, 1991.
6. J. Hilliard, J. Reis, Valuation of commodity futures and options nnder stochastic convenience yields, Interest rates and jump diffusions in the spot, The journal of financial and quantitative analysis, 1998, 61–86.
7. M A. Aba Oud, J. Goard, Stochastic models for oil prices and the pricing of futures on oil, Applied mathematical finance, 2015, 189-206.
8. M. Brennan, E. Schwartz, Evaluating natural resource investments, Journal of business, 1985, 135–157.
9. M. A Dias, K. Rocha, Petroleum concessions with extendible options: Timing and value using mean reversion and jump processes for oil prices, IPEA, Rio de Janeiro, working paper number 620, 1999.
10. P .Bjerksund, S. Ekern. Contingent claims evaluation of Mean-Reverting cash flows in shipping. In real options in capital investment models, Strategies and applications, 1995.

www.SID.ir