

مدیریت ریسک نقدینگی در طول بحران مالی با استفاده از کنترل بهینه تصادفی

علی پور شرافتان^{۱*}، علی دلاور خلی^۲، ریحانه حضوری^۳.

^۱ یزد، دانشگاه یزد، (Ali70.Sherafat@gmail.com)

^۲ یزد، دانشگاه یزد، (Delavarkh@yazd.ac.ir)

^۳ کرمان، دانشگاه شهید باهنر، (Reihaneh.Hozouri@yahoo.com)

چکیده: در زمان وقوع بحران مالی بانک‌ها جهت حفظ سطح نقدینگی خود تحت فشار شدید هستند. به طور کلی شواهد تجربی نشان می‌دهد نقدینگی کافی انجام تعهدات را تضمین می‌کند، درحالی‌که بانک‌های فاقد آن، این توانایی را ندارند. ما به دنبال ارائه‌ی مدلی هستیم که توانایی پیش‌بینی رفتار نقدینگی شرکت یا نهاد مطبوع را داشته باشد. این سیستم دینامیکی از اطلاعات قبل نهاد مورد نظر که در اینجا بانک می‌باشد، تغذیه می‌شود. در واقع هدف این سیستم دینامیکی بدست آوردن دیدی کلی از رفتار نقدینگی بانک از طریق مشاهده‌ی همین نوع رفتار در گذشته‌ی اعتباری، عملیاتی، بازار و نقدینگی می‌باشد. علت این امر این است که ریسک نقدینگی تحت تأثیر مستقیم ریسک‌های اعتباری، عملیاتی و بازار است. لذا با توجه به قوانین کمیته‌ی بال، یافتن روشی مبتنی بر دینامیک تصادفی پارامترهای نقدینگی بانک از قبیل دارایی‌های نقدشونده و خالص جریان نقدی خروجی، یکی از چالش‌های مورد توجه بانک‌های مرکزی می‌باشد. هدف این مقاله تعیین استراتژی بهینه جهت کاهش ریسک نقدینگی بانک از طریق افزایش نسبت پوششی نقدینگی می‌باشد.

کلمات کلیدی: ریسک نقدینگی، اوراق بهادار سازی، کنترل بهینه‌ی تصادفی، معادله‌ی همیلتن-ژاکوبی-بلمن.

طبقه بندی موضوعی: MSC 2010: 91G80

مقدمه

ریسک نقدینگی به معنی عدم آمادگی بانک‌ها برای تأمین تسهیلات اعطایی یا پرداخت به موقع دیون بانک‌ها (سپرده‌ها) می‌باشد. البته باید متذکر شد این نوع ریسک شامل ریسک‌های دیگر نیز می‌باشد، به همین دلیل کنترل و جبران خسارت چنین ریسکی، پس از احقاق این نوع از ریسک‌ها غیر قابل ممکن و در اغلب موارد محال می‌باشد. شایان ذکر است مدل‌های ارائه شده جهت جلوگیری از چنین ریسکی و همچنین به حداقل رساندن خسارات آن در بیشتر موارد دارای دقت و پیچیدگی لازم نبوده است [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]. در این مقاله ما به ارائه‌ی راهکاری جهت کاهش ریسک نقدینگی با استفاده از ابزار قوی کنترل بهینه‌ی تصادفی می‌پردازیم. در این راستا ابتدا دینامیک تصادفی رفتار نقدینگی بانک را در قالب معادله دیفرانسیل تصادفی ارائه و بررسی می‌کنیم. سپس به طرح مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تصادفی می‌پردازیم [۶]، [۷]، [۸].

۱- فرضیات پژوهش

فرض کنید با فضای احتمال فیلتر شده‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ همراه با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ بر مجموعه‌ی شاخص زمانی $[0, T]$ کار می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم فضای موجود در شرایط معمول صدق می‌کند و تحت اندازه احتمال \mathbb{P} ، $\{W_t; 0 \leq t \leq T, W_0 = 0\}$ یک حرکت برآونی $-\mathcal{F}_t$ - اندازه‌پذیر باشد [۹]، [۱۰]. بعلاوه، ما می-

توانیم سیستمی از معادلات دیفرانسیل که اطلاعات مربوط به سهام دارایی‌های نقدشونده را در زمان t تأمین می‌کند، تولید کنیم. این نوع سهام را با $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : x^1$ ، که با x_t^1 مشخص می‌شود، نمایش می‌دهیم. همچنین خالص جریان نقدی خروجی در زمان t را با $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : x^2$ ، نمایش می‌دهیم و با x_t^2 مشخص می‌کنیم [7]، [11]. نسبت پوشش نقدینگی را با $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : l$ نمایش می‌دهیم و آن را بصورت زیر مطرح می‌کنیم،

$$l_t = \frac{x_t^1}{x_t^2}. \quad (1,2)$$

۴- نسبت پوشش نقدینگی

در این مقاله چنانچه در قوانین کمیته‌ی بال مرسوم به بال ۳ مطرح شده است، ما به بررسی نسبت پوشش نقدینگی می‌پردازیم. این نسبت بعنوان مجموع دارایی بین بانکی و اوراق بهادار صادر شده از نهادهای دولتی بعنوان درصدی از بدهی بین بانکی تعریف می‌شود [11]، [12]، [13]، [14].

از معادلات زیر جهت بیان دارایی نقدشونده، x^1 و جریان نقدی خروجی، x^2 استفاده می‌کنیم.

$$dx_t^1 = [r^c(t)x_t^1 + x_t^1 \tilde{\pi}_t^1 \tilde{r}_t^1 + x_t^2 u_t^1 + x_t^2 u_t^2 - x_t^2 r_t^e] dt + [x_t^1 \tilde{\pi}_t^1 \tilde{\Sigma}_t^1 dW_t^y - x_t^2 \sigma^e dW_t^e]. \quad (4,1)$$

$$dx_t^2 = x_t^2 [r_t^e dt + \sigma^e dW_t^e] - x_t^2 [r_t^i dt + \sigma^i dW_t^i] = x_t^2 [r_t^i - r_t^e] dt + x_t^2 [\sigma^i dW_t^i - \sigma^e dW_t^e]. \quad (4,2)$$

که در آن $\mathbb{R} \rightarrow T : r^e$ نرخ جریان نقدی خروجی به ازای هر واحد خالص جریان نقدی خروجی است و $\mathbb{R} \rightarrow T : \sigma^e$ تغییرات در جریان نقدی خروجی به ازای هر واحد خالص جریان نقدی خروجی و $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times [0, T] : W^e$ حرکت برآونی استاندارد می‌باشد. حال $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times [0, T] : i$ را بعنوان افزایش خالص جریان نقدی خروجی، قبل از جریان نقدی خروجی هر واحد پولی خالص جریان نقدی خروجی در نظر می‌گیریم. $\mathbb{R}^+ \rightarrow T : r^i$ نرخ افزایش خالص جریان نقدی خروجی، قبل از جریان نقدی خروجی است. همچنین $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times [0, T] : W^i$ تغییرات در افزایش خالص جریان نقدی خروجی، قبل از جریان نقدی خروجی و $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times [0, T] : W^i$ حرکت برآونی استاندارد می‌باشد. فرآیند تصادفی $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : u^1$ نرخ جریان نقدی ورودی نرمال به ازای هر واحد خالص جریان نقدی ورودی می‌باشد که مقدار آن در زمان t را با u_t^1 مشخص می‌کنیم و فرآیند تصادفی $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : u^2$ ، نوسانات در هر واحد u^1 نمایش داده می‌شود [11]. در اینجا مجموع u^1 و u^2 را بعنوان نرخ جریان نقدی ورودی $\mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times [0, T] : u^3$ در نظر می‌گیریم و به ازای هر t بصورت $u_t^3 = u_t^1 + u_t^2$ نمایش می‌دهیم. اندازه‌ی سرمایه‌گذاری بهینه یا استراتژی بهینه را بصورت $\pi_t = (\pi_t^0, \tilde{\pi}_t^T)^T = (\pi_t^0, \pi_t^1, \dots, \pi_t^k)^T$ ، نمایش می‌دهیم. همچنین $\tilde{\pi}$ در عبارت فوق استراتژی دارایی ریسکی را نمایش می‌دهد. فرض کنید، $\tilde{C}_t = \tilde{\Sigma}_t^y \Sigma_t^y$ باشد. همچنین ماتریس نرخ بازدهی تصادفی را می‌توان بصورت $\tilde{C}_t = \tilde{\Sigma}_t^y \Sigma_t^y = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Sigma}_t^y \end{pmatrix}$ و $\tilde{\Sigma}_t^y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $\Sigma_t^y = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Sigma}_t^y \end{pmatrix}$ فرض کنید،

زیر بیان می‌کنیم. می‌خواهیم دینامیک تصادفی نسبت پوشش نقدینگی را بر اساس تعریف مستقیم آن که معادل $l_t = \frac{x_t^1}{x_t^2}$ می‌باشد، بدست آوریم. در این راه از دینامیک‌های تصادفی x_t^1 و x_t^2 واقع در عبارت‌های (۴,۱) و (۴,۲) برای ساخت l_t استفاده می‌کنیم. از فرمول ایتو بصورت زیر استفاده می‌کنیم. آنگاه با استفاده از قاعده ضرب ایتو خواهیم داشت [۱۵].

$$d \left(\frac{x_t^1}{x_t^2} \right) = \left(-\frac{x_t^1}{x_t^2} F_2 + \frac{(G_2)^2}{(x_t^2)^3} x_t^1 + \frac{F_1}{x_t^2} \right) dt + \left(\frac{G_1}{x_t^2} - \frac{x_t^1}{(x_t^2)^2} G_2 - \frac{G_1 G_2}{(x_t^2)^2} \right) dW_t \quad (4,3)$$

در نتیجه پس از ساده‌سازی خواهیم داشت،

$$dl_t = l_t \left[r^c(t) + r_t^e - r_t^i + (\sigma^e)^2 + (\sigma^i)^2 + \tilde{\pi}_t^T \tilde{r}_t^y \right] dt + \left[u_t^1 + u_t^2 - (\sigma^e)^2 - r_t^e \right] dt + [(\sigma^e)^2 (1-l_t)^2 + (\sigma^e)^2 x_t^2 + (l_t)^2 \tilde{\pi}_t^T C_t \tilde{\pi}_t] \frac{1}{2} d\overline{W}_t$$

۵- مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی نقدینگی

تابع ارزش غیر نزولی، مقعر و تعریف شده بر مجموعه اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. برای مثال $\text{Ln}(x)$ تابع ارزشی است که برای $x > 0$ تعریف شده است. یک کلاس کلی از چنین تابع ارزش‌هایی، با انتخاب $p < 1$, $p \neq 0$ و عدد $c \in \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌شود [۱۶] و [۱۹].

$$U_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}(x-c)^p & \text{if } x > c \\ 0 & \text{if } 0 < p < 1 \text{ \& } x = c \\ -\infty & \text{if } p < 0 \text{ and } x = 0 \\ -\infty & \text{if } x < c \end{cases} \quad (5,1)$$

مطابق با تابع ارزش هارا، تابع هدفی می‌سازیم که دارای عامل نسبت پوشش نقدینگی l_t باشد.

$$\mathbb{E} U_p(l_t) \quad (5,3)$$

ما باید تابع هدف فوق را ماکزیمم کنیم. مسئله‌ی کنترل بهینه را چنین بدست می‌آوریم [۱۷].

$$\text{Max } \mathbb{E} U_p(l_t), \quad p < 1, p \neq 0 \quad (5,4)$$

$$dl_t = l_t \left[r^c(t) + r_t^e - r_t^i + (\sigma^e)^2 + (\sigma^i)^2 + \tilde{\pi}_t^T \tilde{r}_t^y \right] dt + \left[u_t^1 + u_t^2 - (\sigma^e)^2 - r_t^e \right] dt + [(\sigma^e)^2 (1-l_t)^2 + (\sigma^e)^2 x_t^2 + (l_t)^2 \tilde{\pi}_t^T C_t \tilde{\pi}_t] \frac{1}{2} d\overline{W}_t, \quad l_t \in [l_0, t_0]$$

برای محاسبه‌ی کنترل بهینه، ابتدا تابع هارا (۵,۱) را با $p = 0.5$ و $c = 0$ می‌سازیم. حال با توجه به اصل برنامه‌ریزی پویای تصادفی عوامل کنترل را چنین بدست می‌آوریم. جواب کنترل بهینه را بصورت $W(t, l) = k(t) l^{\frac{1}{2}}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا خواهیم داشت [۱۷].

$$\max_{\tilde{\pi}^*} \left\{ -\frac{1}{8} \frac{1}{l_i^2} \left(\sigma^e{}^2 - 1 - l_i^2 + \sigma^e{}^2 x_i^2 + l_i^2 \approx 7 \tilde{C}_i \tilde{\pi}^* \right)^2 \right\} - 0,$$

$$\frac{\sqrt{l_i}}{2} \left(r^c - l_i + r_i^e - r_i^i + \sigma^e{}^2 + \sigma^i{}^2 + \tilde{\pi}_i^* r_i^y \right) u_i^1 u_i^2 - e^2 r_i^e$$

با مشتق‌گیری از $\tilde{\pi}^*$ در عبارت درون رادیکال $2 \frac{r_i^y}{C_i}$ بدست خواهد آمد.

۶- مثال عددی

فرض کنید داده‌های مورد نیاز در مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تصادفی (۵,۴) و $\tilde{\pi}^*$ به شرح زیر باشد.

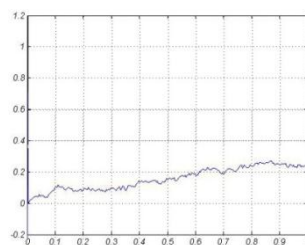
$$r^c = 0.24, r^e = 0.25, r^i = 0.1, \sigma^e = 0.05, \sigma^i = 0.05, \tilde{r} = 0.45, u^1 + u^2 = 0.35,$$

$$\tilde{C} = 2, x_i^2 = 50, \tilde{\pi}^* = 0.45$$

با اعمال داده‌های بالا در معادله‌ی تصادفی مسئله (۵,۴)، دینامیک نسبت پوشش نقدینگی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$dl_t = (0.5975l_t + 0.1025) dt + (0.4075l_t^2 + 0.005l_t + 0.1275) dW, l_0 = 0.01. \quad (۶,۱)$$

اکنون وقت آن رسیده است تا با روش ارائه شده در این فصل (اویلر- ماریاما)، دینامیک نسبت پوشش نقدینگی را شبیه‌سازی کنیم [۱۵]، [۱۸]. ابتدا این دینامیک را با ۱۰۰۰ بار تکرار یعنی برای هزار مسیر نمونه‌ای تقریب می‌کنیم.



نمودار (۱-۶): میانگین ۱۰۰۰ مسیر نمونه‌ای

نمودار نسبت پوشش نقدینگی روند صعودی و مثبتی را طی کرده است. این شبیه‌سازی حاکی از افزایش حداقل بیست برابری نسبت پوشش نقدینگی تحت استراتژی بهینه می‌باشد.

۷- نتایج

در این مقاله از کنترل بهینه‌ی تصادفی جهت ارزیابی رفتار نقدینگی بانک استفاده شده است. چنانچه می‌دانید در دنیای واقعی تحت شرایط مختلف امکان صعود و یا نزول ناگهانی قیمت سهام وجود دارد و این امر حاکی از

پرش در قیمت ذکر شده می‌باشد. لذا استفاده از ابزار دقیق‌تری در ارزیابی نسبت پوشش نقدینگی که مستقیماً به بازدهی سهام مربوط می‌باشد، این پدیده را به واقعیت نزدیک می‌کند.

مراجع

- [1] End W. J., Tabbae M., *When liquidity risk becomes a systemic issue: empirical evidence of bank behavior*, *Journal of Financial Stability*, In press, 2009.
- [2] Loutschina E., *The role of securitization in bank liquidity and funding management*, *Journal of Financial Economics*, In press, 2011.
- [3] Ringbom S., *Optimal liquidity management and bail-out policy in the banking industry*, *Journal of Banking & Finance*, 2004, 1319-1335.
- [4] Moretto M., Tamborini R., *Firm value, illiquidity risk and liquidity insurance*, *Journal of Banking & Finance*, 2007, 103-120.
- [5] Wagner W., *The liquidity of bank assets and banking stability*, *Journal of Banking & Finance*, 2007, 121-139.
- [6] Agénor P. R., *Excess liquidity, bank pricing rules, and monetary policy*, *Journal of Banking & Finance*, 2010, 923-933.
- [7] Merrouche O., Schanz J., *Banks' intraday liquidity management during operational outages: Theory and evidence from the UK payment system*, *Journal of Banking & Finance*, 2010, 314-323.
- [8] Haan L., End J. W., *Bank liquidity the maturity ladder, and regulation*, *Journal of Banking & Finance*, 2013, 3930-3950.
- [9] Ratnovski L., *Liquidity and transparency in Bank risk management*, *Journal of Financial Intermediation*, 2013, 422-439.
- [10] Drehmann M., Nikolaou K., *Funding Liquidity risk: Definition and measurement*, *Journal of Financial Intermediation*, 2013, 2173-2182.
- [11] Gideon F., Petersen M. A., Mukuddem-Petersen J., De Waal B., *Bank Liquidity and the Global Financial Crisis*, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1-27.
- [12] Shreve S., *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag - New York, 2004.
- [13] H. Föllmer and A. Schied, *Convex measures of risk and trading constraints*, *Finance and Stochastics*, 6 (2002), 429-447.
- [14] Hull J., *Options, Futures and Other Derivatives*, 6th ed. Upper Saddle River – NJ Prentice Hall, 2006.
- [15] Evans L.C., *An Introduction to Stochastic Differential Equations Version 1.2*, Department of Mathematics, paper 130, (2006).
- [16] Shreve S., *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag - New York, 2004.
- [17] Fleming W. H., Rishel R. W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975.
- [18] Burrage .P.M., *Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations*, Ph.D. thesis, University of Queensland, 1999.