بررسی وجود حباب در قیمت یک دارایی بر اساس زنجیرهای مارکف

علی آقامحمـدی[۱]، محمـد حیدری[۲]*

[۱] گروه آمار دانشگاه زنجان،**aghamohammadi.ali@znu.ac.ir**

[۲] گروه ریاضیات مالی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، mheidari@iasbs.ac.ir

چکیده:منظور از حباب قیمت یک دارایی، افزایش بیش از حد و خارج از انتظار قیمت آن است. کاهش چشم‌گیر قیمت بعد از ایجاد حباب نیز اصطلاحا ترکیدن حباب نامیده می‌شود. از لحاظ تاریخی می‌توان گفت که بحران‌های مالی، اغلب با یک حباب بازار سرمایه به‌وجود می‌آیند، به‌طوری که ترکیدن حباب قیمت یک دارایی می‌تواند منجر به بحران اقتصادی در اقتصاد حقیقی یک کشور شود. در این مقاله به بررسی و کشف این حباب‌ها پرداخته خواهد شد. یک مدل جدید برای قیمت بیان می‌شود، که ساختار دینامیک آن بصورت دو رژیم متفاوت می‌باشد. در واقع یک رژیم دوره نرمال را نشان می‌دهد، که متناظر با فرض کارا بودن بازار است و دومین رژیم بیانگر دوره حباب می‌باشد. این دو رژیم تحت یک زنجیر مارکف، قابل تبدیل به یکدیگر هستند. برای تخمین وضعیت‌های پنهان و پارامترهای مدل و در پایان پیش‌بینی و بررسی وجود حباب در زمان‌های حقیقی، روش‌های آمار بیزی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: حباب، مدل فضا-حالت، پارتیکل فیلتر، فیلتر کالمن

طبقه بندی موضوعی:۹۱G۹۹ ، ۶۵C۳۵

۱ مقدمه

برای تشخیص حباب قیمت در یک دارایی، روش‌های متعددی وجود دارد که یکی از آنها مدل‌سازی به روش تغییر رژیم است. دراین روش دو حالت برای فرآیند قیمت در نظر گرفته می‌شود. در یک حالت فرآیند قیمت متناظر با دوره نرمال و در حالت دیگر متناظر با دوره‌ی حباب می‌باشد. می‌توان برای تخمین پارامترها و حالت‌های پنهان در این مدل از روش استنباط بیزی دنباله‌ای و پارتیکل فیلترها استفاده کرد که با دریافت مشاهدات جدید، پارامترها و حالت‌ها را به روزرسانی می‌کند.

۲ مدل قیمت

فرض کنید دو حالت وجود داشته باشد که رفتار خودبرگشتی سری‌های زمانی قیمت را با $s_t = 1$ در حالت نرمال و $s_t = 2$ در حالت حباب بیان کند. برای این دو حالت فرآیندها را بصورت

$$s_t = 1 : x_t = \alpha_t (1-\beta_1) + \beta_1 x_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t , \beta_1 < 1 , \quad (۱,۲)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \delta \eta_t , \quad (۲,۲)$$

$$s_t = 2 : x_t = \beta_2 x_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t , \beta_2 > 1 , \quad (۳,۲)$$

تعریف می‌کنیم. در حالت نرمال، x_t یک فرآیند با خاصیت بازگشت به میانگین، حول میانگین تصادفی α_t است به قسمی که سرعت بازگشت به میانگین β_1 است. برای این‌که میانگین در بلند مدت بطور تدریجی تغییر

---

* سخنران

کند، α_t طبق معادله (۲،۲) از یک فرآیند قدم زدن تصادفی پیروی می‌کند که تغییرپذیری آن با δ بیان شده است. حالت دوم مدل که دارای ریشه انفجاری می‌باشد، همان وجود حباب در قیمت دارایی را نشان می‌دهد. زیرا خواهیم دید که x_t به عنوان قیمت یک دارایی با مقدار اصلی آن جایگزین خواهد شد.

برای بیان ناهمگونی واریانس دو حالت متفاوت برای σ_t در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم زنجیر مارکف r_t برای مقدار $r_t = 1$ تلاطم ضعیف و برای مقدار $r_t = 2$ تلاطم قوی را نشان می‌دهد.

بردار پارامتر معین دینامیک سیستم، دارای ۱۰ پارامتر مجهول بصورت

$$\theta = (\lambda_1, k_2, \mu_2, z_{11}, z_{22}, \sigma_l, \sigma_m, \delta, \beta_1, \beta_2)^t ,$$

بوده و با استفاده از روش آمار بیزی تخمین زده شده و با ورود داده‌های جدید به روزرسانی می‌شوند. [1]

۳ مدل فضا-حالت و فیلتر کالمن

برای تخمین توزیع α_t در مدل قیمت فوق، مدل را بصورت یک مدل فضا-حالت بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$x_t = A(s_t)x_{t-1} + B(s_t)\alpha_t + C(r_t)\varepsilon_t , \qquad (۱،۳)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \delta\eta_t . \qquad (۲،۳)$$

که در آن $s_t, r_t \in \{1, 2\}$ دو زنجیر مارکف مستقل بوده و B ، A و C توابعی معلوم از این دو زنجیر مارکف هستند. مدل (۱،۳) مدل مشاهده و مدل (۲،۳) مدل حالت نام دارند. متغیرهای ε_t و η_t مولفه‌های خطا هستند، که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و وراریانس معلوم فرض می‌شوند. [2]

با استفاده از فیلتر کالمن، توزیع α_t به شرط مشاهدات داده شده تا زمان t بصورت

$$P(\alpha_t \,|\, x_{1:t}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \mu_t^{ij} N(\alpha_t, \hat{\alpha}_{t|t}^{ij}, \Sigma_{t|t}^{ij}) , \qquad (۳،۳)$$

است. توجه کنیم این توزیع یک توزیع نرمال آمیخته بوده که در آن

$$\hat{\alpha}_{t|t}^{ij} = \hat{\alpha}_{t|t-1}^{ij} + K_t^{ij}(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{ij}) ,$$

$$\Sigma_{t|t}^{ij} = \Sigma_{t|t-1}^{ij} - K_t^{ij} S_t^{ij} K_t^{ijT} ,$$

$$\hat{x}_{t|t-1}^{ij} = B(i)\hat{\alpha}_{t|t-1}^{ij} + A(i)x_{t-1} ,$$

$$S_t^{ij} = B(i)\Sigma_{t|t-1}^{ij} B^T(i) + C(j)RC^T(j) ,$$

$$K_t^{ij} = \Sigma_{t|t-1}^{ij} B^T(i)(S_t^{ij})^{-1},$$

معادلات فیلتر کالمن هستند. همچنین ضرایب این توزیع برابر

$$\mu_t^{ij} = P(s_t = i, r_t = j | x_{1:t}),$$

است. [3]

حال با دریافت مشاهده جدید در زمان t و به‌روز رسانی توزیع α_t و با استفاده از روش پارتیکل فیلتر گسسته*، توزیع حالت‌های پنهان معادله قیمت بصورت $(s_t^i, r_t^i, \alpha_t^i)_{i=1,\dots,N}$ با وزن‌های $q_t^i = \frac{1}{N}$ بدست می‌آید. [2]

۴ تابع تصمیم برای تشخیص حباب

می‌دانیم در آمار بیزی استنباط‌ها براساس یک تابع تصمیم انجام می‌شوند. در اینجا تابع تصمیم برای تشخیص دوره‌های نرمال و حباب را براساس تابع تصمیم

$$L_t(s_t, a_t) = l_t^b a_t 1_{\{s_t=1\}} + l_t^n (1-a_t) 1_{\{s_t=2\}}, \qquad (۱,۴)$$

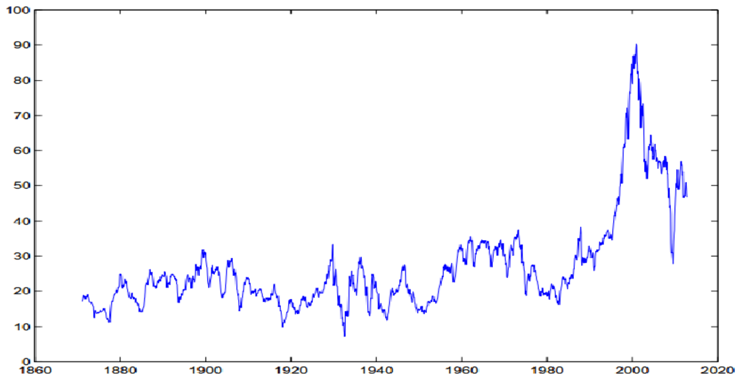
در نظر می‌گیریم که در آن l_t^b برابر خطای تشخیص یک دوره نرمال به عنوان یک دوره حباب و l_t^n نیز خطای تشخیص یک دوره حباب به‌عنوان یک دوره نرمال می‌باشد. بنابراین تشخیص دوره به‌عنوان یک دوره حباب زمانی بهینه است که نامساوی

$$\xi = \frac{l_t^b}{l_t^n} < \frac{P(1_{\{s_t=2\}} | x_{1:t})}{P(1_{\{s_t=1\}} | x_{1:t})},$$

برقرار باشد. [1]

۵ تحلیل داده‌ها در این قسمت مدل عنوان شده در بخش دوم را برای داده‌های واقعی که نسبت قیمت به سود تقسیمی شاخص $S\ \&\ P\ 500$ را نشان می‌دهند، برازش می‌دهیم. نمودار مقادیر این نسبت‌ها از ژانویه‌ی سال ۱۸۷۱ تا ژوئن سال ۲۰۱۲ میلادی به‌صورت زیر می‌باشد.

*** Discrete Particle Filter**



شکل ۱: نسبت های قیمت به سود تقسیمی $S\ \&\ P\ 500$

برای تحلیل شاخص $S\ \&\ P\ 500$ مدل را برای سه مقدار $\xi = 1,2,3$ مورد بررسی قرار می‌دهیم که نتایج آن در جدول زیر بیان شده است.

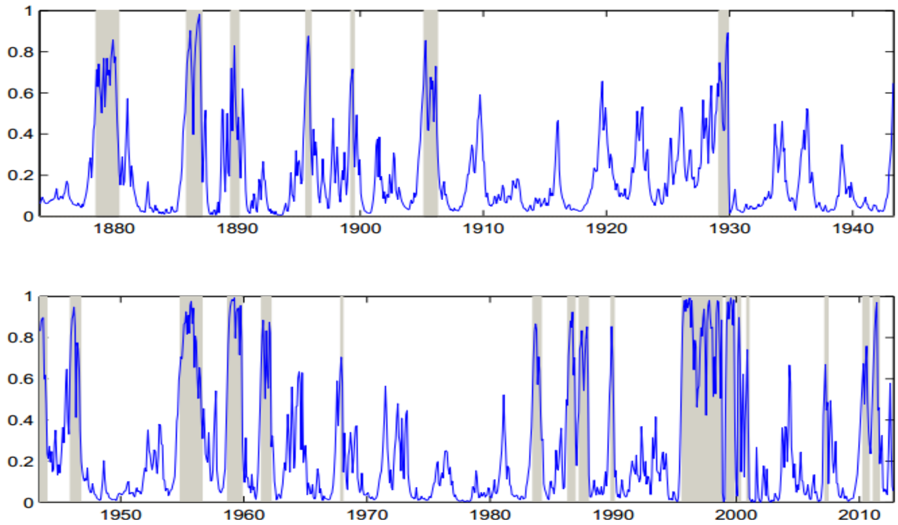
جدول ۱: آماره‌های تشخیص حباب برای $S\ \&\ P\ 500$

مقادیر ξ	تعداد دوره‌های حباب	میانگین زمان دوره‌های حباب	متوسط تعداد ماه‌های دوره حباب
$\xi = 1$	58	0.16	4.5
$\xi = 2$	24	0.14	9.7
$\xi = 3$	20	0.125	10.4

با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که برای $\xi = 1$، تعداد دوره‌های حباب بیشتر از حالت‌های دیگر است. اما متوسط تعداد ماه‌های وقوع حباب در این حالت کمتر از حالت‌های دیگر است. بنابراین انتخاب $\xi = 1$ مناسب نیست. زیرا در این حالت تقریباً تمام دوره‌هایی که در آن‌ها قیمت افزایش می‌یابد به عنوان دوره حباب شناسایی می‌شوند که این امر سازگار با تعریف حباب قیمت نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای $\xi = 3$، متوسط تعداد ماه‌های وقوع حباب بیشتر از حالت‌های دیگر بوده و تعداد دوره‌های حباب کمتر است. در این حالت ممکن است یک دوره نرمال که بین دو دوره‌ی حباب اتفاق افتاده است، به عنوان دوره حباب شناسایی شود. لذا این انتخاب نیز برای ξ مناسب نیست. بنابراین $\xi = 2$ مقدار بهینه برای پارامتر ξ می‌باشد که نمودار احتمال وجود حباب برای این حالت در شکل ۲ آمده است. در

شکل ۲ دوره‌های حباب طوری مشخص شده‌اند که احتمال وجود حباب در آن بیشتر از ۵۰ درصد است. قسمت‌های حاشور خورده بیانگر دوره‌های حباب هستند.



شکل۲: نمودار احتمال وجود حباب در شاخص $S\ \&\ P\ 500$ متناظر با $\xi = 2$

۶ نتایج اساسی

در این مقاله برای تحلیل حباب قیمت از یک مدل آماری که دارای دو حالت نرمال و حباب است، استفاده شد. برای برازش مدل به مشاهدات از روش های بیزی که در آن‌ها استنباط‌ها براساس پارتیکل فیلترها است، استفاده گردید. در پایان مدل ارائه شده برای تحلیل داده‌های تاریخی شاخص $S\ \&\ P\ 500$ از سال ۱۸۷۱ تا ۲۰۱۲ میلادی مورد استفاده قرار گرفت. طبق تحلیل انجام شده ملاحظه شد که در شاخص $S\ \&\ P\ 500$، ۲۴ دوره حباب با طول دوره‌های متفاوت وجود دارد. اگر دوره‌های حباب در زمان وقوع به درستی مشخص شوند، سرمایه‌گذاران ریسک گریز به دلیل خطر آتی ناشی از فروپاشی حباب از سرمایه‌گذاری در آن دارایی، اجتناب می‌کنند. لذا این امر مانع تقاضای فزاینده شده و به نرمی از شدت اوج‌گیری حباب می‌کاهد. بنابراین تشخیص دوره‌های حباب در کنترل بازار بسیار مفید خواهند بود.

مرجع‌ها

1. A. Floup and J. Yu, Bayesian analysis of bubbles in asset prices, Research Collection School of Economics, Singapore Management University, 2014.
2. P. Fearnhead, Sequential Monte Carlo methods in Filter Theory, PhD Thesis, Department of Statistics, University of Oxford, 1998, pp. 86-97.
3. Y. Bar-Shalom, S. Challa, and H. A. P. Blom, IMM estimator versus optimal estimator for hybrid systems, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. 41, No.3, 2005, pp. 986-991.