هزینه‌های معامله در پوشش ریسک اختیارها

امیر حسین تابش*، علی صفدری
دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده: اخیرا مدل بلک-شولز برای قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیارها، به دلیل فرض‌های ساده و غیر واقعی‌اش مورد انتقاد و بحث قرار گرفته است. یکی از فرض‌های مدل بلک-شولز این است که معاملات متحمل هزینه معامله‌ای نمی‌شوند. با حذف این فرض، مدل فوق کارایی مناسبی را نخواهد داشت. در حضور هزینه‌های معامله، سبد شامل دارایی پایه و دارایی بدون ریسک در شرایط ریسک خنثی صدق نمی‌کنند. بنابراین سرمایه‌گذار با دو راهی پوشش ریسک و هزینه معامله مواجه است. عمده روش‌های موجود برای پوشش ریسک با در نظرگرفتن هزینه‌های معامله متناسب، به دنبال ایجاد تعادل بهینه بین هزینه و ریسک بنا شده‌اند. حداکثرسازی مطلوبیت و حداقل سازی ریسک با قید هزینه از این طیف روش‌ها محسوب می‌شود. در این مقاله به بررسی رویکردی برای ایجاد ارتباط بین مدل‌های نظری و کاربردی پرداخته شده است.

کلمات کلیدی: اختیارها، پوشش ریسک، هزینه های معامله
طبقه بندی موضوعی: 65M70, 35K15, 91G80

۱. مقدمه

در سال ۱۹۷۳ میلادی با انتشار مدل بلک-شولز برای قیمت گذاری اختیار معامله‌های خرید و فروش، انقلابی تازه در این‌گونه اوراق به وقوع پیوست. مدلی که برای قیمت گذاری ارائه شد دارای مفروضاتی مانند پیوستگی معاملات، عدم وجود هزینه‌های معامله و ... می‌باشد[۱]. در این مقاله به بررسی پوشش ریسک اختیارها در حضور هزینه‌های معامله می‌پردازیم. هزینه‌های معامله اشکال مختلفی دارند. در ادامه بر روی هزینه معامله‌ای تمرکز می‌کنیم که متناسب با ارزش معامله هستند، به این معنی که اگر y واحد از دارایی پایه به قیمت S خریداری (فروخته) شود، در کنار هزینه‌ای معادل yS که برای خرید (فروش) پرداخت می‌شود، باید هزینه معامله‌ای با نرخ ثابت $(\lambda^s)\lambda^b$ پرداخت شود. استراتژی‌های پوشش ریسک تحت این شرایط برای سرمایه گذاران پراهمیت است. للاند تلاطم غیر ثابت اصلاح شده را برای استراتژی پوشش ریسک سبد بلک شولز به کار گرفت. محققین به رویکردهای دیگری وابسته به تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار روی آوردند. هوجز و نیوبرگر پیشگام پژوهش در

* سخنران

قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیارها در این زمینـه انـد[4]. آن‌هـا از حداکثرسـازی مطلوبیـت مـورد انتظار از ثروت نهایی سرمایه‌گذار با کنترل تعداد دارایی پایه y_t برای پوشـش ریسـک اسـتفاده کردنـد. رویکرد دیگری توسط لی و لیم مبتنی بر مسئله حداقل سازی هزینه بـا قیـد ریسـک ارائـه شـد[۵]. در ادامه این مقاله به معرفی استراتژی‌های متداول موجود می‌پردازیم و رویکرد جدیدی برای ایجاد ارتبـاط بین رویکردهای نظری منطبق با مسائل کاربردی مطرح می‌کنیم.

۲. توازن سبد با گسسته سازی زمان

در استراتژی پوشش ریسک دلتای بلک-شولز، Δ سهم از دارایی پایه برای متوازن سـازی سـبد در موضع فروش قرار می‌گیرند. در این مدل Δ مساوی مشتق جزیی قیمت اختیار نسـبت بـه دارایـی پایـه است. با حذف دو فرض پیوستگی معاملات و وجود هزینه‌های معامله، این استراتژی دیگر کـارا نخواهـد بود. برای عملیاتی کردن فرض پیوستگی معاملات، گسسته سازی از زمان به صورت

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T, \quad t_i - t_{i-1} = \delta,\ i = 1, \quad , N$$

در نظر گرفته می‌شود که هر یک از بازه‌های $[t_{i-1} \ \ t_i]$ را بازه‌های تجدیدنظر مـی‌نـامیم و تـوازن مجـدد سبد پوشش ریسک در هریک از این نقاط گسسسته شده انجام می‌شود. للاند[۶] پیشنهاد به اسـتفاده از تلاطم اصلاح شده

$$\sigma_L = \sigma_L(\sigma, \delta, \lambda^b, \lambda^s) = \sigma\left(1 + \frac{\lambda^b + \lambda^s}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma}}\right)^{1/2}$$

در استراتژی پوشش ریسک بلک-شولز را عنوان کرد. در این روش، در هـر زمـان تجدیـد نظـر t، سـبد پوشش ریسک با $\Delta(t, S_t, \sigma_L)$ سهم از دارایی پایه متـوازن مـی‌شـود کـه در آن S_t قیمـت دارایـی در لحظه t و $\Delta(.,.,\sigma_L)$ دلتای بلک-شولز با تلاطم اصلاح شده استفاده شده است. این واقیعت که سبد پوشش ریسک پیشنهادی للاند، خود تامین نمی‌باشد، باعث شـد تـا بویـل و وورسـت [۲] در چـارچوب درخت دو جمله‌ای، استراتژی تکراری خودتامین ایجاد کنند.

۳. استراتژی پوشش ریسک مبتنی بر قاعده

هر یک از رویکردهای مبتنی بر بهینه سازی و متوازن سازی متوالی سبد، دارای اشکالاتی از جمله محاسبات پیچیده هستند که اجرایی شدن آن‌ها برای داده‌های واقعی را محدود می‌کند. به این دلیل رویکرد دیگری با هدف اصلاح استراتژی پوشش ریسک منطبق با معیار نظری و دستیابی به بهترین عملکرد پوشش ریسک تجربی، توسط چن، لی و لیم ارائه شد[۳]. ایده این روش، ایجاد استراتژی پوشش ریسک از میان یک زیر مجموعه از استراتژی‌های پوشش ریسک خودتامین مطلوب است. به همین منظور، مجموعه‌ای از قواعد برای استراتژی پوشش ریسک خودتامین تعریف می‌شوند و از میان این استراتژی‌های پوشش ریسک قاعده محور، استراتژی مطلوب شناسایی و انتخاب می‌شود.

با توجه به استراتژی حداکثرسازی مطلوبیت و استراتژی حداقل‌سازی ریسک با قید هزینه، اولین قاعده از استراتژی‌های پوشش ریسک خودتامین امکان پذیر، وجود دو کران خرید و فروش می‌باشد، به طوری که سرمایه‌گذار فقط وقتی سبد پوشش ریسک را مجدداً متوازن می‌کند که قیمت دارایی پایه خارج از منطقه بدون معامله قرار گیرد. بنابراین کران‌های $Y^b(t,s) < Y^s(t,s)$ وجود دارند به طوری که به ازای $n = 1,\cdots,N$

$$y_{n\delta} = \begin{cases} Y^b(n\delta, S_{n\delta}) & if \quad y_{(n-1)\delta} < Y^b(n\delta, S_{n\delta}) \\ y_{(n-1)\delta} & if \quad Y^b(n\delta, S_{n\delta}) \le y_{(n-1)\delta} \le Y^s(n\delta, S_{n\delta}) \\ Y^s(n\delta, S_{n\delta}) & if \quad y_{(n-1)\delta} > Y^s(n\delta, S_{n\delta}) \end{cases}$$

در این روش می‌توان از کران‌های خرید و فروش زیر استفاده کرد

$$Y^b(t,S) \approx \max\{\Delta^{bs}(t,S) - d^b(t,S), 0\}$$
$$Y^s(t,S) \approx \min\{\Delta^{bs}(t,S) + d^s(t,S), 1\}$$

که $d^{b,s}(t,S)$ توابعی با مقادیر مثبت هستند. برای سادگی محاسبات، ثابت مثبت $d^b(t,S) = d^s(t,S) = d$ به کار گرفته شده است.

فرض کنید سبدی از M اختیار با دارایی پایه یکسانی ایجاد شده است و با $m = 1,2,\ldots,M$ اندیس‌گذاری شده اند. زمان شروع و سررسید m-امین اختیار با t_m و T_m نشان داده می‌شوند. عملکرد استراتژی پوشش ریسک را

$$\hat{\eta} = (\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \overline{err}_m^2)^{1/2}$$
$$\overline{err}_m^2 = e^{-r(T_m-t_m)} err(t_m, T_m; \delta),$$

در نظر گرفته و آن را خطای پیش بینی تحقق یافته می‌نامیم.

وضعیت دوره‌های متوالی پوشش ریسک را با $k = 0,1,2,\ldots$ اندیس‌گذاری می‌کنیم. سبد اختیارها در k-امین دوره شامل M_k اختیار است که اولین و آخرین معامله بر m-امین اختیار در دوره kام، به ترتیب $t_{k,m}$ و $T_{k,m}$ می‌باشد. در نتیجه خطای تحقق یافته برای k-امین دوره به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\eta}_k = \left(\frac{1}{M_k}\sum_{m=1}^{M_k} \overline{err}_{k,m}^2\right)^{1/2}$$

که $\overline{err}_{k,m} = e^{-r(T_{k,m}-t_{k,m})} err\left(t_{k,m}, T_{k,m}, \delta\right)$.

۳,۱ استراتژی پوشش ریسک مبتنی بر قاعده

به ازای هر $k > 0$، از کران‌های $Y^s(t,s)$ و $Y^b(t,s)$ که در دوره *k-1* تعیین می‌شوند، برای پوشش ریسک اختیارهای دوره kام استفاده می‌شوند. سپس خطای پوشش ریسک تحقق یافته $\hat{\eta}_k$ برای دوره k محاسبه می‌شود. با مینیمم کردن $\hat{\eta}_k$ نسبت به پارامترهای توابع $d^s(t,S)$ و $d^b(t,S)$، کران‌های $Y^s(t,s)$ و $Y^b(t,s)$ متناظر با دوره kام ایجاد می‌شوند. این روند بطور مشابه برای پوشش ریسک دوره *k+1* به کار گرفته می‌شود. در این استراتژی، هر مرحله پارامترها برای فراهم کردن کران‌های خرید و فروش مرحله بعد آماده سازی می‌شوند.

مراجع

1. F. Black, and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637-654.

2. P.P. Boyle, and T. Vorst, Option replication in discrete time with transaction costs, The Journal of Finance, 47 (1992), pp. 271-293.
3. L. Chen, T.L. Lai, and T.W. Lim, A new approach to pricing and hedging options with transaction costs (In press).
4. S.D. Hodges, and A. Neuberger, Optimal replication of contingent claims under transactions costs, Review of Futures Markets, 8 (1989), pp. 222-239.
5. T.L. Lai, and T.W. Lim, Option hedging theory under transaction costs, Journal of Economic Dynamics and Control, 33 (2009), pp. 1945-1961.
6. H.E. Leland, Option pricing and replication with transactions costs, Journal of Finance, 40 (1985), pp. 1283-1301.