قیمت گذاری مشتقات تحت ریسک متقابل دوطرفه

لیلا رحیمی*، محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه

چکیده: در 1970، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون مدل بلک و شولز و مرتون را مطرح کردند. این مدل توانست دنیای قیمت‌گذاری مشتقات مالی را متحول کند. پس از آن امکان قیمت-گذاری مشتقات مالی با استفاده از یک رابطه صریح ایجاد شد. ولی وقتی معاملات با عدم اجرای تعهد روبرو شد روش هایی برای پوشش ریسک موردبرسی قرارگرفت دراین بین دوفی و هوانگ نکول را نیز در قیمت گذاری ها اعمال کردند و به قیمت گذاری مشتقاتی پرداختند که در جهت این هدف ایجاد شده بود. حال ما به این می اندیشیم که اگر در مشتقات اعتباری نکول اتفاق بیافتد چه خواهد شد؟ ارزش مشتقه چگونه خواهد بود؟ درواقع حالتی را درنظر می‌گیریم که طرفین معامله به تعهدات خود به هر دلیلی عمل نکنند و به دنبال آن هستیم که در این شرایط قیمت مشتقات به چه شکل خواهد بود.

کلمات کلیدی: ریسک طرف معامله، ریسک اعتباری،قیمت گذاری مشتقات اعتباری،مدل تقلیل یافته،نکول

۱ مقدمه

بنا بر تعریف ریسک اعتباری، ریسک تغییر کیفیت اعتباری طرف قرارداد است. مهم ترین بخش آن ریسک نکول یا همان ریسک اینکه وام گیرنده(طرف معامله) به علت عدم علاقه یا ناتوانی به تعهد خود درموقع عمل نکند. در این مقاله منظور از ریسک اعتباری همین ریسک نکول است. هدف مدیران ریسک در موسسات مالی اجتناب از ریسک

*سخنران

ویا مدیریت آن به نحوی است که کمترین آسیب مالی را به موسسه وارد کند که برای این کار از مشتقات اعتباری استفاده می کنند. مشتقات اعتباری اوراق بهاداری هستند که از آن ها برای مدیریت ریسک اعتباری در صنعت بانکداری استفاده می شود. انتقال برخی اشکال اعتباری بین دو یا چند طرف قرارداد، فعالیتی است که از مشتقات اعتباری برمی آید. توجه می کنیم که مشتقه اعتباری قراردادی است که بازده آن به ارزش اعتباری یک یا چند شرکت و یا بخش اقتصادی بستگی دارد. در حقیقت رشد مشتقات اعتباری در پاسخ به نیازهای مالی مخصوصا بانک ها برای دستیابی به ابزاری جهت پوشش و متنوع سازی ریسک های اعتباری است. نتیجه این تلاش تغییر ریسک اعتباری از یک ریسک غیر نقدشونده و نامناسب برای معامله به ریسک قابل معامله است. مدل های ریسک اعتباری با ایجاد ارتباطی منطقی بین ریسک و بازده دارایی ها در ضمن براورد احتمال عدم بازپرداخت و اندازه زیان احتمالی، میزان صرف ریسک اوراق قرضه و وام ها را تعیین نموده و از این طریق امکان قیمت گذاری آن ها را فراهم می آورند. در صورتی که در مشتقات اعتباری، طرف معامله نکول کند درواقع با ریسک متقابل دوطرفه مواجه شده ایم . به تعبیر دقیق تر وام دارای ریسک نکول و مشتقات اعتباری دارای ریسک طرف معامله هستند. می توان اینگونه در نظر گرفت که ریسک طرف معامله ریسک نکولی است که در مشتقات اعتباری با آن مواجه هستیم. ریسک طرف معامله (متقابل) نقش مهمی در بحران مالی ۲۰۰۸ ایفا کرده است. با توجه به مقاله ای که توسط انجمن بین المللی معاملات مشتقه و سواپ (ISDA) در ۲۰۱۳ نوشته شد، درصد همه‌ی معاملات با توجه به معاملات دارای ضمانت-نامه در خارج از بازار بورس (OTC) از ۳۰٪ در ۲۰۰۳ به ۷۳,۷٪ در ۲۰۱۳ افزایش یافته بود.

در این مقاله با استفاده از روش دوفی و هوانگ و دوفی و سینگلتون به ارزشگذاری مطالبه مشروط تحت ریسک متقابل دوطرفه می پردازیم.

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و خانواده از سیگما جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}$ تحت $\mathcal{F}$ را درنظرمیگیریم. متغیر حالت $X = (X_1, \ldots, X_n)$ فرایند مارکوفی است. X_1 ها هریک دارای دینامیک به فرم زیر هستند:

$$dX_i(t) = \mu_i(X(t))dt + \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(X(t))dW_j(t)$$

$W_1,\ldots,W_d$ هریک حرکت براونی یک بعدی مستقل هستند. و $A = a_{ij}$ ماتریس انتشار است. ما فرض می‌کنیم که بازار بدون اربیتراژ باشد طبق قضیه اساسی اول اندازه احتمال مارتینگل Q مرتبط با واحد قیمت-گذاری حساب بانکی وجود دارد.

مطالبه مشروط با سررسید T را درنظربگیریم تابع $\pi(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ عایدی مطالبه است. زمان نکول طرف معامله i را با τ^i که $\mathcal{F}$-زمان توقف است، نمایش می دهیم. فرایند شدت h^i درنظرمی گیریم به طوری که $dH_t^i = (1 - H_t^i)h_t^i dt + dM_t^i$ وقتی $H_t^i = 1\{\tau^i \le t\}$ تابع نشانگر نکول طرف i است. M_t^i نسبت به Q مارتینگل است. شدت یک فرایند تصادفی تحت احتمال شرطی است که در آن لحظه نکول رخ می‌دهد نرخی را که در آن نکول رخ می‌دهد شدت نکول می نامند وبه زبان ریاضی می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$h(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} p(\tau \le t + h \mid \tau > t).$$

$\tau = \tau^A \wedge \tau^B$ مینیمم زمان های نکول درنظر گرفتیم. نمادهای زیررا معرفی می کنیم

$\mathrm{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ ، پالایه تولید شده به وسیله X را نیز با F^X و پالایه تولیدشده با فرایند نشانگر $H_t^i = 1\{\tau^i \le t\}$ با H نمایش می دهیم.خواهیم داشت: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{H}_t$.این فرض را نیز اضافه می کنیم که $\mathrm{P}(\tau^A = \tau^B) = 0$

فرایند ارزش مطالبه تحت ریسک نکول طرف معامله را با U نمایش می دهیم. اگر نکول در زمان t باشد، ارزش مطالبه در زمان t، (۱) $U_t^-(\gamma_t^A + \gamma_t^B)$ خواهد بود که در آن

$$\gamma_t^A = 1\{t = \tau^A\}(1\{U_t^- < 0\}(1 - L_t^A) + 1\{U_t^- \ge 0\}) \qquad (۲)$$

$$\gamma_t^B = 1\{t = \tau^B\}(1\{U_t^- \ge 0\}(1 - L_t^B) + 1\{U_t^- < 0\}) \qquad (۳)$$

ما فرض می کنیم که فرایند زیان کسری L^{i} کراندار و قابل پیش بینی است. U_{t}^{-} قیمت مطالبه، دقیقا قبل از نکول است به طوری که $U_{t}^{-} = \lim_{s \to t} U_{s}$. در واقع می توان اینگونه بیان کرد که اگر ارزش طرف معامله A مثبت باشد، نکول توسط B باعث جهش رو به پایین در ارزش مطالبه از مقدار U_{t}^{-} به $(1 - L_{t}^{B})U_{t-}$ خواهد بود وقتی $L_{t}^{B} \in [0,1]$ توصیف کننده فرایند کسری طرف A با نکول از طرف B باشد. در مقابل اگر ارزش طرف A مثبت باشد فرض می کنیم که نکول توسط A باعث تغییر در ارزش نمی گردد.

فرایند V با این ویژگی که $V_{T} = \Pi(X_{T})$ و $V_{t} = U_{t}$ برای t<τ درنظر می‌گیریم. در اینجا V_{t} نماش دهنده‌ی ارزش مشتقات نکول پذیر طرف معامله ریسک خنثی در زمان t است در صورتی که تا زمان t نکول نداشته باشیم. منظور از ریسک خنثی نسبت به اندازه مارتینگل Q است. $s_{t}^{i} = s^{i}(V_{t}, X_{t}, t) = L_{t}^{i} h_{t}^{i}$ ، حدس ما این است که فرمول نهایی ارزش مطالبه در حالت زمان پیوسته به فرم زیر است:

$$V_{t} = D_{t} E^{Q}[\exp(-\int R_{s} ds) \frac{\Pi(X_{T})}{D_{t}} | X_{t}] \quad \text{که} \quad D_{t} = \exp(\int_{0}^{t} r_{u} du) \quad \text{و}$$

$$R_{t} = s_{t}^{A} 1\{V_{t} < 0\} + s_{t}^{B} 1\{V_{t} \geq 0\}$$

برای اثبات حدسمان از فرایند منفعت که مجموع قیمت و انباشتگی های سودهای تقسیمی است استفاده می کنیم بدین شکل که باید پس از تنزیل با نرخ بهره r نسبت به Q مارتینگل باشد.

تنزیل فرایند منفعت را بدین فرم تعریف می‌کنیم:

$$G_{t} = \exp(-\int_{0}^{t} r_{s} ds) V_{t}(1 - H_{t}) + \int_{0}^{t} \exp(-\int_{0}^{s} r_{u} du) V_{s}^{-}(\gamma_{s}^{A} + \gamma_{s}^{B}) dH_{s}$$

در G_{t} عبارت اول تنزیل قیمت مطالبه و دومین عبارت تنزیل پرداختی مطالبه در نکول است.

با بکار گیری فرمول ایتو بروی G ، برای اینکه G مارتینگل باشد طبق لم ۱باید داشته باشیم:

$V_{t} = \int_{0}^{t} (r_{s} + R_{s}) V_{s} ds + m_{t}$ برای mبا اعمال شرط $V_{T} = \Pi(X_{T})$ به درستی حدس پی می بریم.

لم۱: برای $f \in \wedge$ و متغیر تصادفی $\mathcal{F}_T$-اندازه پذیر Y و فرایند تغییر متناهی $\{D_t : 0 \le t \le T\}$ ،

فرض می‌کنیم که وجود دارد $p \in [1,\infty)$ به طوری که $\int_0^T |f(0,w,t)|\,dt$ و Y و $\int_0^T |dD_t|$ در L^P قرار دارند.و همچنین فرض می‌کنیم که مقادیر ثابتی چون K>0 وجود دارد که f، K-لیپشیتس با

n

$|f(x,w,t) - f(y,w,t)| \le k\,|x-y|$ برای تمام (w,t) و $(x,y) \in \mathbb{R}^B$ است.

انگاه جواب یکتای V برای معادله انتگرالی تصادفی

$V_t = E[\int f(V_s,w,s)ds + dD_s + Y \,|\, \mathcal{F}_t]$; t<T وجود دارد.

مرجع‌ها

1. Bjork. Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press, 2009

2. P.Carr,S.Gamami, derivatives pricing under bilateral counterparty risk,Finance and Economics Discussion Series (2015).FEDS.2015.026

3. D. Duffie and M. Huang. Swap rates and credit quality. Journal of Finance, 51:921{949, 1996.

4. D. Duffie and K. J. Singleton. Credit Risk. Princeton University Press, Princeton, New Jerse, 2003.

5. D. Duffie and K. Singleton. Modeling term structures of defaultbale bonds. The Review of FinancialStudies, 12:687{720, 1999