Archive of SID

بررسی و کاربرد کارایی مدل کلاسیک وازیچک در بازار مالی ایران

نسیم عبادی نژاد[۱]، محمدعلی جعفری[۲*]

[۱] کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشگاه خوارزمی Ebadi.nassim@Yahoo.com

[۲] استادیار گروه ریاضیات مالی، دانشگاه خوارزمی **m.a.jafari@khu.ac.ir**

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی کلی مدل کلاسیک وازیچک برای پیش بینی نرخ سود در بازارهای مالی ایران می پردازیم. از آنجائیکه این مدل به صورت معادله دیفرانسیل تصادفی بیان می شود در ادامه به حل معادله دیفرانسیل تصادفی و امید ریاضی و واریانس جواب می پردازیم. سپس با استفاده از داده های بازارهای مالی ایران (مانند بازار سکه طرح جدید، بازار طلا، شرکت کارگذاری، بازار ارز، بازار نفت و بازارهای ثانویه و ...) این مدل را با استفاده از روش های موجود در برآورد پارامترهای مجهول (نظیر روش گشتاورها و روش حداکثر درستنمایی) کالیبره می کنیم. مدل های کالیبره شده توسط دو روش نامبرده در نرخ سود در بازارهای مالی مطرح شده استفاده می شود و میزان خطای نرخ سود بدست آمده توسط این روش و نرخ سود بدست آمده توسط داده های واقعی بازار مالی بدست می آید و نمودار مربوطه رسم می شود.

کلمات کلیدی: مدل وازیچک ، پیش بینی، برآورد پارامترها

طبقه بندی موضوعی: ۶۰ H ۱۰

۱ مقدمه

دراین مقاله پیش بینی نرخ بهره یا سود بااستفاده از مدل کلاسیک وازیچک بیان می‌شود. هدف اصلی این تحقیق حل معادله تصادفی کلاسیک وازیچک وبررسی کارایی مدل‌کلاسیک مطرح شده دربازارهای مالی کشورمان است .این مدل به صورت معادله دیفرانسیل تصادفی است که درابتدالازم است این معادله حل شود و پارامترهای مجهول در مدل برآورد شود. دو روش پارامتری برای برآوردو یا کالیبره کردن معادلات دیفرانسیل تصادفی مورداستفاده قرار می‌گیرد. درنهایت کارایی مدل مطرح شده در بازارهای مالی ایران سنجیده می‌شود.

۲ پیشینه تحقیق

نرخ سود یا نرخ بازده موردانتظار دراموری همچون تصمیم‌گیری‌های مالی و سرمایه‌گذاری‌ها مورداستفاده قرار می‌گیرند. تا کنون مطالعات زیر در زمینه مدل‌های نرخ سودکوتاه مدت انجام گرفته اند: درسال ۲۰۱۴ بایراسی واونال بااستفاده از مدل گارچ یک و یک پیوسته زمان بر روی داده‌های اوراق

---

* سخنران

www.SID.ir

Archive of SID

خزانه دو سال ترکیه، اقدام به بررسی نوسان پذیری نرخ سودکوتاه مدت کردندوبه این نتیجه رسیدنداین مدل پیوسته زمان بسیار بهتر از مدل‌های گسسته می‌تواندرفتار نرخ سود کوتاه مدت را برازش کند.

۳ مدل پیشنهادی

مدل وازیچک [۱] یک مدل ریاضی برای توصیف رشد نرخ سوداست. این مدل میتواند در ارزیابی نرخ سود مشتقه مورداستفاده قرار گیرد و همچنین با بازارهای اعتباری سازگاراست. مدل وازیچک درسال۱۹۷۷ توسط الدریک وازیچک بعنوان یک مدل سرمایه گذاری تصادفی معرفی شد.این مدل خاص نرخ سودآنی رانشان می‌دهدو به صورت زیراست:

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(T))dt + \sigma dw(t), \qquad (1)$$

که α ، β و σ مقادیرثابت ومثبت هستند. بنابراین جواب صریح این معادله دیفرانسیل با ضرب فاکتور انتگرال $e^{\beta t}$ در معادله بالا به صورت زیر بدست می آید:

$$R(t) = e^{-\beta t}R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s} dw(s). \qquad (2)$$

درنتیجه امیدریاضی و واریانس جواب بدست آمده به شرح زیرخواهدبود:

$$E(R(t)) = e^{-\beta t}R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1) \qquad (3)$$

$$Var(R(t)) = \frac{\partial^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}). \qquad (4)$$

.

مزیت مدل وازیچک قابل مقایسه بودن آن است. به عنوان مثال نرخ سودثابت دراین مدل توانایی احیاء کردن شکل متفاوتی ازبخش ساختاری داردکه درموردزمان های واقعی بحث می‌کندوعیب مدل مذکور این است که نرخ سودمنفی تولیدمی‌کند. حال در کالیبره کردن به روش گشتاورها نتیجه نهایی به صورت زیر است:

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{cases} m_1 = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right) \\ m_2 = (e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)) + \frac{\partial^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}). \\ m_3 = e^{-3\beta t} R^3(0) + 3e^{-2\beta t} R^2(0) \\ * \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + 3R(0)e^{-\beta t} * \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1 - e^{-\beta t})^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1 - e^{-\beta t})^2 + 3 \\ (\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + 3R(0)e^{-\beta t}) \\ * \frac{\partial^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}). \end{cases} \quad (5)$$

دراین قسمت برای کالیبره کردن به روش حداکثر درستنمایی پس از بدست آوردن تابع توزیع که تابعی نرمال می باشد تابع درستنمایی را بدست می آوریم و سپس از آن لگاریتم طبیعی می گیریم و در آخر با مشتق گرفتن ا ز تابع لگاریتمی نسبت به سه پارامتر موجود و مساوی صفر قرار دادن آنها پارامترهای موردنظر بدست می آید[۲] .

$$\frac{\partial LnL(R:\alpha,\beta,\sigma)}{\partial\sigma} = 0 \quad \frac{\partial LnL(R:\alpha,\beta,\sigma)}{\partial\beta} = 0 \quad \frac{\partial LnL(R:\alpha,\beta,\sigma)}{\partial\sigma} = 0$$

۴ نتیجه گیری

در این قسمت با استفاده از یک دوره دویست و هفتاد و سه روزه از داده های بازارهای مالی ایران (مانند بازار سکه طرح جدید، بازار طلا، شرکت کارگذاری، بازار ارز، بازار نفت و بازارهای ثانویه و ...) موارد خواسته شده را بررسی می کنیم. به این صورت که با هفتاد درصد اول داده‌ها پارامترهای آلفا، بتاو گاما محاسبه شده است و با سی درصد آخر پیش بینی مورد نظر در مورد نرخ سود صورت گرفته است . حال ابتدا مقادیر بدست آمده از پارامترها بوسیله برآوردهای حداکثر درستنمایی و گشتاورها با مقادیر شبیه سازی و داده های واقعی ارائه شده است. بد لیل نرمال بودن مدل پارامترهای بدست آمده در دو روش برآورد حداکثر درستنمایی و گشتاورها دارای مقادیر یکسان خواهند بود.

جدول ۱: کالیبره کردن پارامترها

برآورد پارامترها	برآورد گشتاورها با مقادیر شبیه سازی شده	برآورد حداکثر درستنمایی با مقادیر شبیه سازی شده	برآورد گشتاورها با داده های واقعی	برآورد حداکثر درستنمایی با داده های واقعی
A	- ۰/۰۹۱	- ۰/۰۹۱	- ۰/۰۹۱	- ۰/۰۹۱
B	۹/۴۷۷	۹/۴۷۷	۹/۴۷۷	۹/۴۷۷

www.SID.ir

Archive of SID

۰/۲۴۷	۰/۲۴۷	۰/۲۴۷	۰/۲۴۷	Σ

پیش بینی نرخ سود بوسیله پارامترها برای مدل وازیچک انجام شده است و خطای بدست آمده از مقادیر شبیه سازی محاسبه شده است، بطوریکه نتیجه بدست آمده از داده های واقعی با R، مقادیر شبیه سازی با R^* و تفاضل داده هایواقعی و مقادیر شبیه سازی شده با $R–R^*$ نمایش داده شده است.

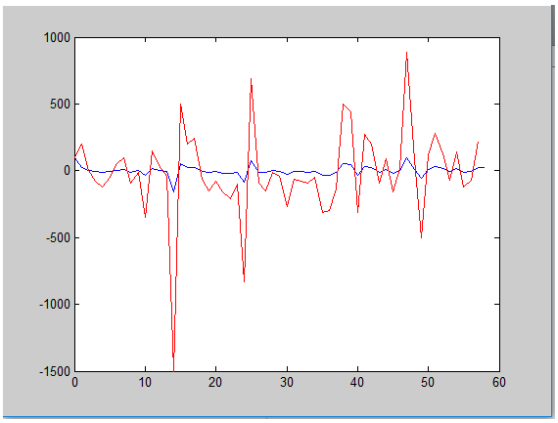
'Time'	'R'	'R*'	'|R-R*|'	'Time'	'R'	'R*'	'|R-R*|'
0	100	100	0	29	-40	-4.2368	-35.7632
1	200	21.1136	178.8864	30	-270	-28.5169	-241.4831
2	0	0.014457	-0.014457	31	-60	-6.3766	-53.6234
3	-80	-8.4005	-71.5995	32	-80	-8.4272	-71.5728
4	-120	-12.7037	-107.2963	33	-90	-9.5394	-80.4606
5	-50	-5.3283	-44.6717	34	-50	-5.309	-44.691
6	50	5.2448	44.7552	35	-310	-32.7096	-277.2904
7	100	10.5125	89.4875	36	-300	-31.6511	-268.3489
8	-90	-9.4576	-80.5424	37	-140	-14.7808	-125.2192
9	-10	-1.0519	-8.9481	38	500	52.742	447.258
10	-350	-36.9005	-313.0995	39	440	46.4044	393.5956
11	150	15.8338	134.1662	40	-310	-32.7233	-277.2767
12	40	4.1817	35.8183	41	270	28.4536	241.5464
13	-40	-4.2539	-35.7461	42	200	21.1273	178.8727
14	-1500	-158.2758	-1341.7242	43	-90	-9.5166	-80.4834
15	500	52.7156	447.2844	44	90	9.4987	80.5013
16	200	21.0832	178.9168	45	-160	-16.8672	-143.1328
17	240	25.3133	214.6867	46	20	2.0961	17.9039
18	-60	-6.3261	-53.6739	47	890	93.914	796.086
19	-150	-15.802	-134.198	48	80	8.4116	71.5884
20	-80	-8.4309	-71.5691	49	-500	-52.7643	-447.2357
21	-160	-16.9238	-143.0762	50	120	12.661	107.339
22	-210	-22.1934	-187.8066	51	280	29.5307	250.4693
23	-100	-10.5229	-89.4771	52	130	13.7179	116.2821
24	-830	-87.5978	-742.4022	53	-70	-7.3684	-62.6316
25	690	72.7682	617.2318	54	140	14.7502	125.2498

شکل۱: نرخ سود با داده های واقعی و شبیه سازی

در ادامه نموداری از نتایج بدست آمده ارائه شده است که در آن تابع با رنگ آبی نرخ سود بدست آمده از داده های واقعی و تابع با رنگ قرمز نرخ سود حاصل شده از شبیه سازی است.

www.SID.ir

Archive of SID



شکل۲: نمودارپیش بینی نرخ سود

مراجع

1. E. Allen, Modeling with Itˆo Stochastic Differential Equations Texas Tech University,USA , Springer-Verlag, 22, 2007.

2. B.Oksendal, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 2003

www.SID.ir