بررسی روش‌های برآورد در معادلات دیفرانسیل تصادفی

مهدی شمس*[۱]، نسرین برقی اسکوئی [۲]
[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان
[۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز

چکیده: در این مقاله پس از مطالعه روش‌های برآورد در مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل‌های با فضای حالت پیوسته-گسسته مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: انتگرال ایتو، چگالی‌های انتقال، پالایش کالمن توسعه‌یافته، پالایش غیرخطی.
طبقه بندی موضوعی: 62F10، 65C30، 60H10.

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل، مشابه مدل‌های سری زمانی پیوسته‌اند و شامل معادله‌ای بر حسب بردار حالت $Y(t)$ (که تابعی از پارامتر با مقادیر حقیقی زمان t است) و مشتق‌های آن هستند. به عنوان مثال مدل رشد ساده $dY(t)/dt = \lambda Y(t)$، بیانگر این مفهوم است که متغیر زمان $Y(t)$ در فاصله $[t, t+dt]$ متناسب با حالتی در این نقطه زمان است که از مثال‌های واقعی این مدل می‌توان به، رشد جوامع یا میرایی اشعه‌های رادیو اکتیو اشاره کرد. جواب معادله بالا با شرط اولیه $Y(t_0)$، به صورت $Y(t) = \exp\left[\lambda(t-t_0)\right]Y(t_0)$ است. در علوم اجتماعی، معادلات دیفرانسیل تصادفی نظیر $dY(t)/dt = \lambda Y(t) + gZ(t)$ کاربرد دارند که $Z(t)$ یک فرایند نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر و تابع اتوکوواریانس $\gamma(t-s) = E(Z(t)Z(s)) = \delta(t-s)$ است. این حقیقت نشان می‌دهد فرایند $Z(t)$ تنها در تمام فواصل کوتاه زمانی خودهمبسته‌اند. جواب معادله دیفرانسیل تصادفی اخیر $Y(t) = e^{\lambda(t-t_0)}Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-s)} gZ(s)ds$ است و با توجه به این که فرایند نوفه سفید زمان

---
* سخنران

پیوسته، یک تابع تعمیم یافته است، می‌توان جواب را برحسب $Z(s)ds = dW(s)$ نوشت که در آن $W(s)$ فرایند پیوسته مشتق‌ناپذیر وینر است. بنابراین به منظور اجتناب از مشتق‌گیری از یک فرایند مشتق‌ناپذیر می‌نویسند، $dY(t) = \lambda Y(t)dt + g dW(t)$ که جواب آن یعنی، $Y(t) = e^{\lambda(t-t_0)} Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-s)} g dW(s)$ در حالتی که شرط اولیه گاوسی یا ثابت باشد، یک فرآیند گاوسی است. به منظور برآورد پارامترها جواب را به صورت یک سری زمانی می‌نویسند، یعنی با در نظر گرفتن $Y_i = Y(t_i)$، $Y_{i+1} = e^{\lambda(t_{i+1}-t_i)} Y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\lambda(t_{i+1}-s)} g dW(s)$ پارامترهای مدل، برآورد می‌شوند که در بخش‌های بعدی این روش‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۲ مدل‌های با فضای حالت پیوسته/گسسته خطی

مدل با فضای حالت پیوسته/گسسته خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$dY(t) = \left[A(t,\psi)Y(t) + b(t,\psi)\right]dt + G(t,\psi)dW(t) \qquad (1)$$

$$Z_i = H(t_i,\psi)Y(t_i) + d(t_i,\psi) + \varepsilon_i$$

که در آن $W(t)$ فرایند وینر r–بعدی و $Y(t)$ بردار حالت p–بعدی است . برای بهره‌گیری از دیدگاه ایتو فرض می‌کنیم خطاهای اندازه‌گیری $E_i \sim WN\left(0, R(t_i,\psi)\right)$ نوفه سفید با زمان گسسته باشند. در برخی مواقع معادله (۱) برای زمان‌های اندازه‌گیری t_i و تابع درستنمایی، با استفاده از میانگین‌های الگوریتم پالایس کالمن به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود. در این حالت از گشتاورهای شرطی $\mu(t|t_i) = E\left[Y(t)|Z^i\right]$ و $\Sigma(t|t_i) = Var\left(Y(t)|Z^i\right)$ استفاده می‌شود که در آن $Z^i = \{Z_i, \ldots, Z_0\}$ اندازه‌گیری‌ها تا زمان t_i هستند. به روز رسانی زمان به صورت زیر انجام می‌شود، $\left(t \in [t_i, t_{i+1}]\right)$: $d\mu(t|t_i)/dt = A(t,\psi)\mu(t) + b(t,\psi)$ و

$$d\Sigma(t|t_i)/dt = A(t,\psi)\Sigma(t|t_i) + \Sigma(t|t_i)A'(t,\psi) + \Omega(t,\psi)$$

که $\Omega(t,\psi)$ ماتریس انتشار است. زمان‌های اندازه‌گیری و به روز رسانی (پیش‌بینی بهینه) توسط اندازه‌گیری Z_{i+1} و استفاده از فرمول بیز اصلاح

می‌گردد: $\mu(t_{i+1}|t_{i+1}) = \mu(t_{i+1}|t_i) + K(t_{i+1}|t_i)v(t_{i+1}|t_i)$،

$\Sigma(t_{i+1}|t_{i+1}) = [I - K(t_{i+1}|t_i)H(t_{i+1},\psi)]\Sigma(t_{i+1}|t_i)$، $v(t_{i+1}|t_i) = Z_{i+1} -$ $Z(t_{i+1}|t_i)$،

$Z(t_{i+1}|t_i) = H(t_{i+1},\psi)\mu(t_{i+1}|t_i) + d(t_{i+1},\psi)$، $\Gamma(t_{i+1}\ t_i\ =$

$H(t_{i+1},\psi)\Sigma(t_{i+1}|t_i)H'(t_{i+1}|t_i) + R(t_{i+1},\psi)$، $K(t_{i+1}|t_i) = \Sigma(t_{i+1}|t_i)H'($

$t_{i+1},\psi)\Gamma(t_{i+1}|t_i)^{-1}$ که در آن، $K(t_{i+1}|t_i)$ سود کالمن، $Z(t_{i+1}|t_i)$ پیش‌گویی بهینه برای اندازه‌گیری Z_{i+1}، $v(t_{i+1}|t_i)$ خطای پیش‌گویی و $\Gamma(t_{i+1}|t_i)$ ماتریس کوواریانس خطای پیش گویی است. خوشبختانه حالت به روز شده $Y(t_{i+1})|Z^{i+1}$ سود گاوسی شرطی است و لذا می‌تواند توسط دو گشتاور شرطی حاصل شود. بعد از T مرحله، درستنمایی $l(\psi;Z) = \log p(Z_T,\dots,Z_0;\psi) = \sum_{i=0}^{T-1}\log p(Z_{i+1}|Z^i;\psi)p(Z_0)$ خواهد بود که چگالی‌های انتقال برحسب توزیع‌های گاوسی $p(Z_{i+1}|Z^i;\psi) =$ $\phi(v(t_{i+1}|t_i);0,\Gamma(t_{i+1}|t_i))$ داده می‌شوند. بنابراین پالایش کالمن، درستنمایی را به صورت بازگشتی برحسب پیش‌بینی‌ها، خطاهای پیش‌گویی و واریانس‌های شرطی آن‌ها محاسبه می‌کند. پارامترهای مدل توسط الگوریتم پالایش کالمن برآورده می‌شوند.

۳ معادلات دیفرانسیل غیرخطی و مدل‌های فضای حالت

در بسیاری از مدل‌های مالی، به مدل‌های غیرخطی با سیستم عمومی زیر برخورد می‌کنیم:

$$dY(t) = f(Y(t),t,\psi)dt + g(Y(t),t,\psi)dW(t),\ Z_i = h(Y(t_i),t_i,\psi) + \varepsilon_i. \quad (2)$$

یک وضعیت ساده زمانی است که حالت به طور کامل در زمان‌های t_i اندازه‌گیری شود یعنی $Z_i = Y_i = Y(t_i)$. در این صورت به منظور محاسبه تابع درستنمایی $l(\psi;Y) = \log p(Y_T,\ldots,Y_0;\psi) = \sum_{i=0}^{T-1} \log p(Y_{i+1}|Y_i;\psi)p(Y_0)$، تنها باید احتمال انتقال $p(y_{i+1},t_{i+1}|y_i,t_i)$ محاسبه شود. برای این منظور می‌توان از روش‌های تقریبی نظیر خطی‌سازی که می‌تواند روی معادلات گشتاوری دقیق اعمال شود (پالایش کالمن توسعه یافته(EKF)[1]، اعمال مستقیم روش ایتو به روی معادله دیفرانسیل غیرخطی (خطی‌سازی موضوعی [2])، روش‌های خطی‌سازی روی قسمت انتشار، روش‌های مونت کارلو برای محاسبه تقریب چگالی‌های انتقال [3]، استفاده از دیدگاه ناپارامتری که تابع رانش $f(.)$ و تابع انتشار $\Omega(.)$ بدون داشتن فرضیات شکل تابعکی برآورده می‌شوند (با روش‌های چگالی هسته، چگالی‌های شرطی برآورده می‌شوند) و بالاخره استفاده از بسط‌های تیلور تابع رانش و برآورد مشتق‌ها می‌توان بهره جست. مدل فضای حالت پیوسته/گسسته (۲) می‌تواند به صورت تقریبی بوسیله معادلات گشتاوری، خطی شود، اگر بتوانیم معادلات زیر را محاسبه کنیم (وابستگی به ψ حذف شده است):

$$d\mu(t|t_i)/dt = E[f(Y,t)|Z^i] \qquad (3)$$

$$d\Sigma(t|t_i)/dt = E[f(Y,t)(Y(t)-\mu(t|t_i))|Z^i] + E[\Omega(Y,t)].$$

بسط تیلور مرتبه اول f حول میانگین شرطی $\mu(t|t_i) = E[Y(t), Z^i]$ منجر به پالایش کالمن توسعه یافته (EKF) پیوسته/گسسته $d\mu(t|t_i)/dt = f(\mu(t|t_i),t)$ و $d\Sigma(t|t_i)/dt = A(\mu(t|t_i),t)\Sigma(t|t_i) + \Sigma(t|t_i)A'(\mu(t|t_i),t) + \Omega(\mu(t|t_i),t)$ می‌شود که ژاکوبی $A(\mu(t|t_i),t) = \partial f(\mu(t|t_i),t)/\partial y$ است. برای ساختن (۳)، EKF یک معادلات دیفرانسیل هستند که به روش‌های عددی حل می‌شوند. به روز رسانی زمان توسط معادلات $\partial p(y,t|Z^i)/\partial t = F(y,t)p(y,t|Z^i)$، $p(y\ t_i\ Z^i, = p\ y_i\ |Z^i$ و $p(y,t_{i+1}|Z^i) = p(y_{i+1}|Z^i)$ که $t \in [t_i,t_{i+1}]$، $i = 0,\ldots T, -$ انجام می‌شود و F عملگر

فوکر-پلانک‌است:

$$F(y,t)p(y,t\mid x,s) = -\sum_i \partial\left[f_i(y,t)p(y,t\mid x,s)\right]/\partial y_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2[\Omega_i$$

$(y,t)p(y,t\mid x,s)]/\partial y_i\partial y_j$. رویکرد پالایش منجر به محاسبه بازگشتی تابع درستنمایی $l(\psi;Z)=\sum_{i=0}^{T-1}\log p(z_{i+1}\mid Z^i;\psi)+\log p(z_0;\psi)$ می‌شود. شبیه سازی براساس روش‌های پالایش در حالت زمان گسسته به روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی، رد نمونه‌گیری توابع چگالی، نمونه‌گیری مهم و متغیرهای متضاد و دوباره نمونه‌گیری بوت-استراپ بازگشتی و در حالت زمان پیوسته به کمک معادله چپمن-کولموگروف انجام می‌شود [3].

مرجع‌ها

[1] A.H. Jazwinski. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, New York, 1970.

[2] I. Shoji and T. Ozaki. A statistical method of estimation and simulation for systems of stochastic differential equations. Biometrika, 85, 1:240–243, 1998.

[3] H. Singer. Simulated Maximum Likelihood in Nonlinear Continuous-Discrete State Space Models: Importance Sampling by Approximate Smoothing. Computational Statistics, 18,1:79–106, 2003.