

تعمیم مدل انتشار گومبرتز از دیدگاه استنباط آماری و کاربردهای آن

مهدی شمس*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

چکیده: در این مقاله یک تعمیم غیرهمگن از فرایند تصادفی انتشار گومبرتز بر اساس این حقیقت که تنها عامل کاهش سرعت در یک رانش، تابعی وابسته به زمان است مطالعه می‌شود. روش تعمیم بر اساس معادلات کولموگوروف و ایتو است. در این مقاله تابع چگالی احتمال فرایند، توابع روند آن، برآورد حداکثر درست‌نمایی و فاصله اطمینان پارامترها محاسبه می‌شوند. **کلمات کلیدی:** فرایند انتشار گومبرتز، عامل کاهش سرعت، برآورد حداکثر درست‌نمایی. **طبقه بندی موضوعی:** 60H10, 65C30, 62F10.

۱ مقدمه

در دهه اخیر مطالعات فراوانی در مورد مدل‌های تصادفی انتشار انجام شده است که این تحقیقات منجر به کاربردهایی در برازش و پیش‌بینی پدیده‌ها در شاخه‌های گوناگونی نظیر زیست‌شناسی، فیزیک، پزشکی، اقتصاد و ریاضیات مالی شده است. این مدل‌ها، فرایندهای انتشار تصادفی نظیر لگ نرمال، رایلی، گومپرتز و لوجستیک را شامل می‌شود. از دیدگاه معادلات انتشار تصادفی، ریکارتی [۴]، فرایند انتشار تصادفی گومپرتز (SGDP) را معرفی کرد که کاربردهای آن در زمینه رشد سلول‌های سرطانی [۱] و مصرف گاز طبیعی در اسپانیا [۲] و غیره توسط محققان مطرح شد. در این مقاله به بررسی یک حالت غیرهمگن از فرایند انتشار گومپرتز براساس این حقیقت که ضریب کاهش سرعت، تابعی از زمان است پرداخته می‌شود. در ابتدا تابع چگالی احتمال فرایند و توابع روند (شرطی و غیرشرطی) محاسبه می‌شوند و سپس با استفاده از نمونه‌گیری گسسته، استنباط‌های آماری نظیر برآورد پارامترها توسط روش حداکثر درست‌نمایی، یافتن توزیع برآوردگرهای حاصل شده و فاصله اطمینان پارامترها انجام می‌گردند. در پایان برای داده‌های شبیه‌سازی شده، کاربردهای این مدل معرفی می‌شوند.

۲ تعمیم فرایند انتشار تصادفی گومپرتز

مدل SGDP همگن توسط ریکارتی [۴] به صورت حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتوی
$$dx(t) = [\alpha x(t) - \beta x(t) \log(x(t))]dt + \sigma x(t)dw(t)$$
 معرفی شد که ثابت α ، نرخ رشد ذاتی و

* سخنران

ثابت β ، عامل کاهش سرعت (شتاب منفی) و ثابت σ ، ضریب انتشار است. با تبدیل $y(t) = e^{\beta t} \log(x(t))$ ، $SGDP$ همگن به یک فرایند وینر تبدیل می‌شود [۲]. بر اساس این حقیقت برای معرفی تعمیم این فرایند، معادله دیفرانسیل تصادفی عمومی $dx(t) = a(t, x(t))dt + \sigma x(t)dw(t)$ که $t \in [t_0, T]$ را در نظر بگیرید و $a(t, x(t))$ به گونه‌ای پیدا می‌شود که معادله بالا از یک فرایند وینر حاصل شود. برای این منظور برای تابع $g(t)$ روی $[t_0, T]$ ، فرمول ایتو را روی تبدیل $y(t) = g(t) \log(x(t))$ اعمال می‌کنیم:

$$dy(t) = g(t) \left[\frac{g'(t)}{g(t)} \log(x(t)) + \frac{a(t, x(t))}{x(t)} - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma g(t) dw(t).$$

شرط این که $y(t)$ یک فرایند وینر باشد آن است که باید فقط تابعی از زمان باشد به طوری که $\frac{g'(t)}{g(t)} \log(x(t)) + \frac{a(t, x(t))}{x(t)} = k(t)$ از این رو یک نسخه غیرهمگن از $SGDP$ با نرخ رشد ذاتی و عامل کاهش سرعت به دست می‌آید:

$$dx(t) = \left[k(t)x(t) - \frac{g'(t)}{g(t)} x(t) \log(x(t)) \right] dt + \sigma x(t) dw(t).$$

در این تحقیق فرض می‌کنیم پارامتر کاهش سرعت تنها به زمان بستگی دارد و لذا $k(t) = a \in (-\infty, +\infty)$ در این حالت، تعمیم خانواده فرایندهای انتشار $\{x(t) : t \in [t_0, T]\}$ با مقادیر اختیار شده در $(0, \infty)$ و گشتاورهای بی‌نهایت کوچک به صورت زیر داده می‌شوند:

$$A_1(t, x) = ax(t) - \frac{g'(t)}{g(t)} x(t) \log(x(t)), \quad A_2(t, x) = \sigma^2 x^2(t). \quad (1)$$

قابل یادآوری است حالت‌های $g(t)$ ثابت، $g(t) = e^{\beta t}$ و $g(t) = t$ به ترتیب فرایند همگن لگ-نرمال، همگن گومپرتز و غیرهمگن گومپرتز را نتیجه می‌دهند. اگر تابع چگالی احتمال مدل (۱) با نماد $f(y, t | x, s)$ نشان داده شود، معادلات کولموگوروف برقرار هستند و به عنوان نمونه معادلات پیشرو برابر است با:

$$\partial f / \partial t = -\partial [a(t, y) f] / \partial y + \frac{1}{2} \partial^2 [b(t, y) f] / \partial y^2.$$

گشتاورهای بی‌نهایت کوچک فرایند (۱) شرط لازم و کافی برای برقراری قضیه ریکارتی [۳] روی تبدیل یک فرایند انتشار به فرایند وینر را تضمین می‌کنند. تبدیل مناسب در این حالت به صورت

چگالی احتمال فرایند حاصل عبارت است از: $\Phi(t) = \int_s^t g^2(\theta) d\theta$ و $\Phi(t, x) = \frac{g(t)}{\sigma} \log(x) - \frac{a - \sigma^2/2}{\sigma} \int_s^t g(\theta) d\theta$ می‌باشد. بنابراین تابع

$$f(y, t | x, s) = \sqrt{2\pi\sigma^2 v^2(s, t)} e^{-\frac{[\log(y) - \mu(s, t, x)]^2}{2\sigma^2 v^2(s, t)}} \quad (2)$$

که چگالی توزیع لگ‌نرمال $\Lambda_1(\mu(s, t, x), \sigma^2 v^2(s, t))$ با

$$\mu(s, t, x) = \frac{g(s)}{g(t)} \log(x) + \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{g(t)} \int_s^t g(\theta) d\theta, \quad v^2(s, t) = \frac{1}{g^2(t)} \int_s^t g^2(\theta) d\theta$$

می‌باشد. در حالتی که $x(t) | x(s) = x_s \sim \Lambda_1(\mu(s, t, x_s), \sigma^2 v^2(s, t))$ تابع روند شرط فرایند برابر است با:

$$E(x(t) | x(s)) = \exp\left\{\frac{g(s)}{g(t)} \log(x(s)) + \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{g(t)} \int_s^t g(\theta) d\theta + \frac{\sigma^2}{2g^2(t)} \int_s^t g^2(\theta) d\theta\right\}. \quad (3)$$

با فرض برقراری شرط اولیه $P(x(t_1) = x_1) = 1$ ، تابع روند فرایند برابر است با:

$$E(x(t)) = \exp\left\{\frac{g(t_1)}{g(t)} \log(x(t_1)) + \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{g(t)} \int_{t_1}^t g(\theta) d\theta + \frac{\sigma^2}{2g^2(t)} \int_{t_1}^t g^2(\theta) d\theta\right\}. \quad (4)$$

۳ استنباط های آماری در مدل

با نمونه‌گیری گسسته $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ از فرایند در لحظه‌های زمانی (t_1, \dots, t_n) و تحت شرط اولیه $P(x(t_1) = x_1) = 1$ و قبول این فرض که $g(t)$ تنها به زمان بستگی دارد، تابع درست‌نمایی متناظر با

فرایند یعنی $L(\mathbf{x}; \alpha, \sigma^2) = \prod_{j=2}^n f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$ با استفاده از (۲)، به صورت

$$L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma) = \prod_{j=2}^n \sqrt{2\pi\sigma^2 v^2(t_{j-1}, t_j)} \frac{1}{x_j} \exp\left(-\frac{[\log(x_j) - \mu(t_{j-1}, t_j, x_{j-1})]^2}{2\sigma^2 v^2(t_{j-1}, t_j)}\right).$$

کار کردن با یک تابع درست‌نمایی معلوم و برای محاسبه ساده برآوردگرها، نمونه گسسته را برای

$$v_j = v_j^{-1} \left(\log(x_j) - \frac{g(t_{j-1})}{g(t_j)} \log(x_{j-1}) \right) \quad \text{و} \quad u_j = \frac{v_j^{-1}}{g(t_j)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(\theta) d\theta \quad \text{به صورت } j = 2, \dots, n$$

تبدیل می‌کنیم و بنابراین تابع درست‌نمایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L_{v_1, \dots, v_n}(\mathbf{a}, \sigma^2) = [2\pi\sigma^2]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{v} - \mathbf{aU}')' (\mathbf{v} - \mathbf{aU}')\right\}$$

که در آن $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)'$ ، $\mathbf{U} = (u_2, \dots, u_n)$ و $v_j = v(t_{j-1}, t_j)$ ، با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به \mathbf{a} و σ^2 برآوردگرهای حداکثر درست‌نمایی به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}\mathbf{U}')\mathbf{U}\mathbf{V} \sim N(\mathbf{a}, \sigma^2(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}) \quad (5)$$

$$(n-1)\hat{\sigma}^2 = \mathbf{V}'(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{U})\mathbf{V} \sim \sigma^2 \chi_{n-2}^2 \quad (6)$$

می‌توان نشان داد $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\sigma}^2)$ آماره بسنده توأم برای (\mathbf{a}, σ^2) است و بنابراین برآوردهای $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\sigma}^2$ به ترتیب **UMVUE** برای \mathbf{a} و σ^2 هستند. فواصل اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای \mathbf{a} و σ^2 به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\left[\hat{\mathbf{a}} - \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} / \sqrt{n-1}, \hat{\mathbf{a}} + \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} / \sqrt{n-1} \right] \quad (7)$$

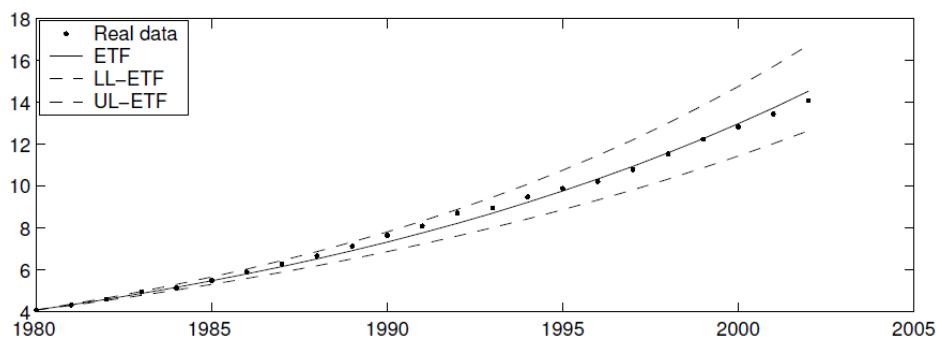
$$\left[(n-1)\hat{\sigma}^2 / \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, (n-1)\hat{\sigma}^2 / \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \right]. \quad (8)$$

۴. شبیه‌سازی

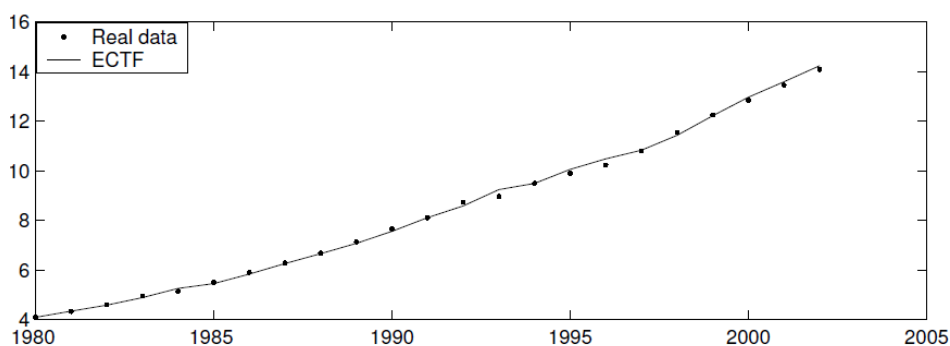
اکنون کاربرد مدل بررسی شده برای داده‌های شبیه‌سازی شده مصرف برق (برحسب 10^9 کیلو وات) مطرح می‌شود. ابتدا ۲۰ مشاهده اول برای برآورد پارامترهای مدل توسط روابط (۵) و (۶) انجام می‌پذیرد و سپس فواصل اطمینان پارامترها توسط معادلات (۷) و (۸) محاسبه می‌شوند. برای پیش‌بینی مقادیر مصرف برق سال‌های بعد از تابع روند برآورد شده (ETF) و تابع روند شرطی برآورد شده (ECTF) که با جابه‌جا کردن پارامترها با برآورد متناظر آن‌ها در عبارت‌های (۳) و (۴) حاصل می‌گردند، استفاده می‌شود. به عنوان نمونه با استفاده از تابع $g(t) = t^{-4}$ ، مقادیر برآوردهای متناظر و فواصل اطمینان به ترتیب برابرند با $\hat{\mathbf{a}} = 0.061$ ، $\hat{\sigma}^2 = 1.7$ ، $\hat{\sigma} = 1.3$ ، $\hat{\sigma} = 1.3$ و $1.037, 3.82) \times 10^{-4}$. جدول ۱ نتایج پیش‌بینی را نشان می‌دهد و مقادیر پیش‌بینی شده توسط ETF و ECTF و کران‌های پایین (بالا) این توابع به ترتیب به صورت (LL-ETF) و (UL-ETF) و (LL-ECTF) و (UL-ECTF) نمایش داده شده است. شکل ۱ برازش‌ها و پیش‌بینی‌های ساخته شده توسط ETF و ECTF را نشان می‌دهد.

Times	Data	ETF	LL-ETF	UL-ETF	ECTF	LL-ECTF	UL-ECTF
2000	12.8380	12.9886	11.4420	14.7624	12.9599	12.8764	13.0448
2001	13.4520	13.7442	12.0327	15.7193	13.5852	13.4977	13.6741
2002	14.0850	14.5421	12.6526	16.7362	14.2336	14.1420	14.3268

جدول ۱: پیش‌بینی بر اساس ETF و ECTF



شکل ۱: برازش و پیش‌بینی بر اساس ETF



شکل ۲: برازش و پیش‌بینی بر اساس ECTF

مرجع‌ها

- [1] Ferrante, L., Bompade, S., Possati, L., and Leone, L. Parameter estimation in a Gompertzian stochastic-model for tumor growth. *Biometrics* 56 (2000), 1076–81.
- [2] Gutierrez, R., Nafidi, A., and Gutierrez-Sachez, R.. Forecasting total natural gas consumption in Spain by using the stochastic Gompertz innovation diffusion model. *Appl Energy* 80, 2 (2005), 115–124.
- [3] Ricciardi, L. M. On the transformation of diffusion processes into the Wiener processes. *J. of Math. Anal. and Appl.* 54 (1976), 185–99.
- [4] Ricciardi, L. M. Diffusion processes and related topics in Biology. *Lecture Notes in Biomathematics* 14, (1977).