

کاربرد ماتریس های عملیاتی در حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی برآمده در ریاضیات مالی

فرخنده حسینی شکرابی^{۱*}، طیبه دمرچلی^۲

^۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام (ره) شهر ری، دانشکده ریاضی،

^۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام (ره) شهر ری، دانشکده ریاضی.

چکیده: در این مقاله، جواب های عددی چند معادله انتگرالی تصادفی ایجاد شده در مسائل مالی را بدست می آوریم. در اینجا از روش ماتریس عملیاتی و ماتریس عملیاتی تصادفی بر پایه توابع متعامد بلاک پالس برای حل عددی معادلات انتگرالی تصادفی استفاده می کنیم و از خصوصیات این چندجمله ایها، برای تبدیل این معادلات به سیستمی از معادلات جبری خطی یا غیر خطی استفاده می شود. این روش را برای حل عددی مدل کاکس- اینگرسل- راس، مدل هستون و مدل وسیچک به کار می گیریم. کارایی روش روی مثالهای مطرح شده نیز بررسی می گردد که ساده بودن روش و اجرای راحت آن را تایید می نماید.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات انتگرالی ولترا تصادفی، حرکت براونی، انتگرال ایتو، ماتریس عملیاتی تصادفی.

طبقه بندی موضوعی: 91G30, 91G60, 60H35, 65C20.

۱ مقدمه

مدل وسیچک به عنوان یک مدل سرمایه گذاری تصادفی به عنوان یک مدل تک عاملی، یکی از جدیدترین مدل های ریاضی است که نرخ بهره لحظه ای را با تغییرات ناشی از تنها یک عامل ریسک بازار توضیح می دهد و از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می کند.

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB(t) \quad (1,1)$$

چون وسیچک امکان نرخ بهره منفی را می دهد، برای شبیه سازی نرخ بهره می توان از مدل کاکس، اینگرسل و راس

*سخنران

$$dr = a(b - r)dt + \sigma \sqrt{r}dB \quad (2,1)$$

استفاده کرد. dr تغییرات در نرخ بهره از دوره ای به دوره دیگر، r سطح جاری نرخ بهره، σ انحراف معیار سالانه نرخ بهره، dt افق زمانی محاسبه نرخ بهره است. در این مسئله dB فرآیند تصادفی وینر، a سرعت تعدیل میانگین بلندمدت نرخ بهره b است [3]. یکی از مدل‌های نوسانات تصادفی که تا حد قابل قبولی کمبودهای مدل بلک-شولز را برطرف می‌کند مدل هستون* می‌باشد. در این مدل تلاطم فرایندی نامنفی و دارای خاصیت بازگشت به میانگین است و فرم کلی آن به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} dS_\tau &= \mu S_\tau dt + \sqrt{v_\tau} S_\tau dB_\tau(\tau) \\ dv_\tau &= \kappa(\gamma - v_\tau)d\tau + \sigma \sqrt{v_\tau} dB_\nu(\tau) \\ dB_\nu(\tau)dB_\tau(\tau) &= \rho d\tau \end{aligned} \quad (3,1)$$

که μ ، κ و σ پارامترهای ثابت هستند، در این مدل $\gamma > 0$ سطح میانگین بلندمدت از $v_\tau > 0$ ، $\kappa > 0$ سرعت بازگشت به میانگین بوده و سرعت مجتمع شدن مسیرها حول γ را طی زمان توصیف می‌کند. σ تلاطم ناگهانی و $B_\nu(t)$ ، $B_\tau(t)$ دو حرکت وینر با همبستگی $\rho \in (-1, 1)$ هستند [3، 1].

۲ توابع بلاک پالس

تعریف ۱،۲. یک مجموعه m -تایی از توابع بلاک پالس به فرم زیر تعریف می‌شوند: [4، 2]

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)]^T \quad t \in [0, T) \quad (1,2)$$

که مولفه i ام بردار $\Phi(t)$ برای $i = 1, 2, \dots, m$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & (i-1)\frac{T}{m} \leq t < i\frac{T}{m}, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

یک تابع کراندار حقیقی $f(t)$ که در بازه $[0, T)$ به طور مربعی انتگرال پذیر است، می‌تواند با یک تابع قطعه ای ثابت $\overline{f_m}(t)$ به صورت زیر تقریب زده شود:

$$\overline{f_m}(t) \cong f(t) = \sum_{i=1}^m f_i \varphi_i(t) = F^T \Phi(t) = \Phi^T(t)F, \quad (2,2)$$

که f_i را ضریب بلاک پالس متناظر i امین تابع بلاک پالس $\varphi_i(t)$ می‌نامیم:

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} f(s) ds \quad (3,2)$$

* Heston model

که $h = \frac{T}{m}$. اگر V یک بردار m -تایی باشد و $\tilde{V} = \text{diag}(V)$ داریم

$$\Phi(t)\Phi^T(t)V = \tilde{V}\Phi(t), \quad (4,2)$$

ماتریس عملیاتی انتگرالگیری Q برای توابع بلاک پالس به صورت زیر است:

$$Q = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

پس

$$\int_0^t f(s)ds \square \int_0^t F^T \Phi(s)ds \square F^T Q \Phi(t).$$

به علاوه انتگرال ایتو از توابع بلاک پالس به فرم $\int_0^t \Phi(s)dB(s) \square Q_s \Phi(t)$ بیان شود که ماتریس عملیاتی انتگرالگیری تصادفی آن به صورت زیر محاسبه شده است.

$$Q_s = \begin{pmatrix} B(\frac{h}{2}) & B(h) & B(h) & \dots & B(h) \\ 0 & B(\frac{3h}{2}) - B(h) & B(2h) - B(h) & \dots & B(2h) - B(h) \\ 0 & 0 & B(\frac{5h}{2}) - B(2h) & \dots & B(3h) - B(2h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B(\frac{(2m-1)h}{2}) - B((m-1)h) \end{pmatrix}_{m \times m}$$

بنابراین انتگرال ایتو از هر تابع $f(t)$ می تواند به صورت زیر تقریب زده شود.

$$\int_0^t f(s)dB(s) \square \int_0^t F^T \Phi(s)dB(s) \square F^T Q_s \Phi(t).$$

۳ کاربرد ماتریس عملیاتی برای حل معادلات انتگرالی تصادفی

روش مطرح شده روی هر سه مدل وسیچک، کاکس-اینگرسل-راس و مدل هستون قابل اجرا است و چون مدل ریاضی هستون حالت کلی تر از آن دو مورد می باشد، بنابراین ما روش را روی مدل هستون پیاده سازی می کنیم. با انتگرالگیری از معادله (۳,۱) داریم

$$\begin{cases} S_\tau = S_0 + \int_0^\tau \mu S_t dt + \int_0^\tau \sqrt{v_t} S_t dB_t \\ v_\tau = v_0 + \int_0^\tau \kappa(\gamma - v_t) dt + \int_0^\tau \sigma \sqrt{v_t} dB_t \end{cases} \quad (1,3)$$

ما توابع S_τ ، S_0 و v_t و v_0 را با توابع بلاک پالس تقریب می‌زنیم. اگر S ، S_0 و v و v_0 و 1 به ترتیب بردارهای ضرایب توابع S_τ ، S_0 و v_τ و v_0 و 1 باشند با جایگزین کردن در (۱,۳) داریم:

$$\begin{cases} S^T \Phi(\tau) \square S_0^T \Phi(\tau) + \mu \int_0^\tau S^T \Phi(t) dt - \int_0^\tau v^T \Phi(t) \Phi^T(t) S dB_t \\ v^T \Phi(\tau) \square v_0^T \Phi(\tau) + \int_0^\tau \kappa(\gamma - v^T \Phi(t)) dt + \int_0^\tau \sigma v^T \Phi(t) dB_t \end{cases} \quad (2,3)$$

جایی که v'

ریشه دوم عناصر v است. بر طبق رابطه (۴,۲) ما به جای $S \Phi^T(t) \Phi(t) \tilde{S}$ می گذاریم. بنابراین

$$\begin{cases} S^T \Phi(\tau) \square S_0^T \Phi(\tau) + \mu S^T Q \Phi(\tau) - v^T \tilde{S} Q_{s1} \Phi(\tau) \\ v^T \Phi(\tau) \square v_0^T \Phi(\tau) + \kappa \gamma 1^T Q \Phi(\tau) - \kappa v^T Q \Phi(\tau) + \sigma v^T Q_{s2} \Phi(\tau) \end{cases} \quad (3,3)$$

با جایگذاری \simeq به جای = در (۳,۳)، سیستمی از معادلات غیر خطی خواهیم داشت. با حل این دستگاه معادلات چه با روشهای تکراری چه با روش های مستقیم ضرایب مجهول را می یابیم.

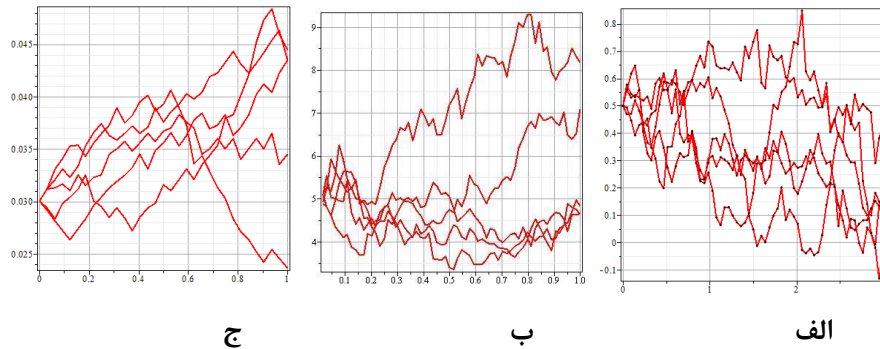
۴ مثال عددی

برای تایید متون قبلی و روش مطرح شده چند مثال عددی را بررسی می نمایم.

مثال ۱,۴. در اینجا معادله (۱,۱) را در نظر می گیریم و پارامترها و مقادیر اولیه را به صورت $r = 0.03, a = 1, b = 0.25, \sigma = 0.3$ در نظر می گیریم. شکل (۱-الف) جواب مدل وسیچک بر اساس روش مطرح شده می باشد.

مثال ۲,۴. مسیر های متعدد از جواب معادله کاکس، اینگرسل و راس با پارامترها و مقدار اولیه در شکل (۱-ب) آورده شده است. $a = 0.05, b = 0.04, \sigma = 0.1$

مثال ۳,۴. در اینجا در مدل (۳,۱) شرایط اولیه $S_0 = 5, v_0 = 0.5$ در نظر گرفته می شوند و پارامترهای $\mu = 0.05, \kappa = 1, \gamma = 0.1, \sigma = 0.1$ انتخاب شده اند. پنج مسیر متفاوت از جواب تقریبی S_τ را با روش ماتریسهای عملیاتی شکل (۱-ج) رسم شده است.



شکل ۱. الف: جواب مدل وسیچک با پارامترهای

$$r = 0.03, a = 1, b = 0.25, \sigma = 0.3$$

ب: مسیرهای متعدد از جواب معادله کاکس، اینگرسل و راس به ازای

$$r = 0.03, a = 0.05, b = 0.04, \sigma = 0.02$$

ج: پنج مسیر متفاوت از جواب تقریبی مدل هستون با $\gamma = 0.1, \sigma = 0.1$.

مرجعها

1. P. Christoffersen, S. Heston, K. Jacobs, (2009), The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well, *Management Science*, 55, 1914-1932.
2. F. Hosseini Shekarabi · M. Khodabin · K. Maleknejad, Application of operational matrices to numerical solution of stochastic SIR model, *Arabian Journal of Mathematics*, DOI 10.1007/s40065-016-0144-2, (2016).
3. F.C. Klebaner, *Intoduction To Stochastic Calculus With Applications*, Monash University, Australia, Second edition, (2005).
4. K. Maleknejad, M. Khodabin, M. Rostami, Numerical Solution of Stochastic Volterra Integral Equations By Stochastic Operational Matrix Based on Block Pulse Functions, *Mathematical and Computer Modelling*, 55 (2012) 791-800.