Archive of SID



# مرور چند مدل تحلیل پوششی داده‌ها DEA و کاربرد آن‌ها درریاضیات مالی

هادی باقرزاده ولمی[1]، هدی گلشنی[1*]

[1] دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام شهرری(ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی تهران، ایران.

**golshani1400@gmail.com**

hadi_bagherzadeh@yahoo.com

**چکیده:** تحلیل پوششی داده‌ها **DEA** یک تکنیک غیر پارامتری ریاضی و یکی از شاخه‌های علم تحقیق در عملیات است. این روش برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده‌ی متجانس با چندین ورودی و خروجی می‌باشد. در مدل‌سازی**DEA** هدف کاهش شاخص‌های ورودی و افزایش شاخص‌های خروجی است. مدل‌های به‌دلیل قابلیت‌های زیادی که در میان روش‌های بهینه‌سازی دارد به طور سریعی در حال رشد در زمینه‌های کاربردی به‌خصوص ریاضیات مالی دارد. هدف اصلی در این مقاله مرور و ارائه چند مدل کاربردی تعمیم یافته **DEA** جهت یافتن بهترین فرصت سرمایه‌گذاری می‌باشد که برای انتخاب یک پرتفوی بهینه ارائه گردیده است. از آنجایی که تعریف صحیح شاخص‌های ورودی و خروجی در دقت مدل‌ها بسیار مهم می‌باشد، ورودی‌ها شاخص‌های ریسک مانند **VaR، CVaR، DaR** و... بازده به عنوان خروجی در طراحی مدل‌های تعیین فرصت‌های سرمایه‌گذاری درنظر گرفته می‌شود. در واقع، دراین مقاله به سه پرسش پاسخ داده می‌شود:۱. در مدل‌سازی مالی آزمون‌های کارایی چگونه ورودی و خروجی مناسب تعریف می‌گردد؟ ۲. آیا ارتباطی میان کارایی‌های مغلوب تصادفی و کارایی **DEA**وجود دارد؟ ۳. چگونه می‌توان مدل هایی تعمیم یافته از تحلیل پوششی داده‌ها طراحی نمودکه مناسب اندازه‌گیری کارایی فرصت‌های سرمایه‌گذاری هستند؟ همچنین با ارائه نتایج مطالعات تجربی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند نشان داده می‌شودکه امتیازکارایی حاصل ازمدل‌های استاندارد و مدل‌های تعمیم یافته **DEA** معادل امتیازکارایی مغلوب تصادفی پرتفوی می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌هاDEA ، آزمون کارایی، متنوع سازی، مغلوب تصادفی

---

[*] سخنران

www.SID.ir

Archive of SID



**طبقه بندی موضوعی:** 90-XX, 90Bxx, 90C90.

## ۱ مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائلی که در مدل سازی ریاضی مالی باید مورد توجه قرارگیرد ریسک گریزی سرمایه‌گذار است. ازاین رو ارائه مدل‌هایی برای تخمین مرز کارای پرتفوی جایگزین مدل میانگین- واریانس گردند ضروری به نظر می‌رسد. مدل میانگین- واریانس نخستین بار توسط ماکوئیتز در سال ۱۹۵۲ مطرح گردید. مقالات بسیاری با جایگزین نمودن شاخص‌های مختلف ریسک به توسعه این مدل پرداختند. اکثر مدل‌های مالی پارامتری هستند. این مدل‌ها مزایای بسیاری دارند، اما معایبی هم دارند. به عنوان مثال، ۱-روش های حل اکثر این مدل‌ها تقریبی است. ضمن این‌که به دلیل زیاد بودن پارامترها پیچیدگی محاسباتی زیادی نیز دارند. ۲- هنگامی که بیشتر از ده نمونه دارای توزیع چند متغیره گؤسی مورد بررسی قرار می گیرند، برازش داده‌های تاریخی با استفاده ازسایر توزیع‌های آماری پیچیده است.

از این رو نیازروزافزون به ارائه مدل های غیر پارامتری و قابلیت‌های آن در کاربردهای مالی ضروری به نظر می‌رسد. DEA نخستین بارتوسط چارنز و همکاران با فرض بازده به مقیاس ثابت(CRS) بر مبنای دیدگاه فارل و کوپمنز ارائه شد وسپس توسط بنکر و همکاران با فرض بازده به مقیاس متغیر(VRS) گسترش پیدا نمود. این روش به دلیل قابلیت‌هایی که دارد مناسب کاربردهای مالی است. مدل‌های DEA برای ارزیابی کارایی واحدهای متجانس، مورد استفاده قرار می‌گیرند. این مدل‌ها به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که بردار ورودی X برای تولید بردار خروجی Y مورد استفاده قرار می‌گیرند. امتیاز کارایی نسبی نیز از مجموع موزون خروجی‌ها بر ورودی‌ها به دست می‌آید. به علاوه شاخص های ورودی هرچه کمتر مصرف شوند بهتر و خروجی هر چه بیشتر تولید شود میزان کارایی بیشتر خواهدبود. در این تکنیک مدل‌ها دسته‌بندی‌های گوناگونی دارند. از لحاظ ماهیت این مدل‌ها به دو دسته ورودی و خروجی محور و بدون ماهیت، از دیدگاهی دیگر نیز به شعاعی و غیر شعاعی تقسیم می‌شوند. این مدل ها به سرعت توسعه یافتند. مدل‌های مضربی و پوششی (دوگان فرم مضربی)، مدل های مبتنی بر اسلک SBM ، مدل های فاصله جهتی و... انواعی از این مدل ها هستند. هدف اصلی دراین مقاله معرفی و دسته بندی چند مدل تعمیم یافته DEA و کاربردهای آن‌ها، DC-DEA جهت شناسایی فرصت‌های سرمایه‌گذاری است که در دهه اخیر ارائه گردیده است. بسیاری از محققان با تکیه بر قابلیت‌های این روش به توسعه و تعمیم مدل های DEA جهت شناسایی فرصت های مناسب سرمایه‌گذاری پرداخته اند.

از جمله قابلیت های این تکنیک که آن را به‌عنوان یک ابزار غیرپارامتری قدرتمند در ریاضیات مالی تبدیل می‌نماید می‌توان به:۱- مرز قطعه ای خطی، که می تواند به عنوان یک کران بالا برای مرز پرتفوی واقعی تلقی گردد. ۲-خاصیت بازده به مقیاس، ۳-امکان محاسبه کارایی های گوناگون مانند کارایی هزینه، مقیاس و سود و... ۴- تنوع مدل‌ها با ماهیت های گوناگون، به‌طوری‌که کارایی‌های ضعیف، نیمه قوی و قوی پارتو فرصت های سرمایه‌گذاری قابل تشخیص خواهند بود. نقاط تصویر DMU های ناکارا به دست می آیند که بهبود یافته‌ی آن‌ها کاراست و می‌تواند مناسب‌ترین تقریب از

www.SID.ir

Archive of SID



مرز کارا را فراهم نماید. مدل های مبتنی بر متنوع‌سازی امکان تقریب مرز کارایی شبیه به مرز کارای مدل میانگین-واریانس را فراهم می‌کنند. ۵- همچنین کارایی DEA می‌تواند به‌عنوان کارایی چند هدفه پارتو در نظر گرفته شود که در آن ورودی ها کاهش، همه و / یا برخی خروجی‌ها تحت برخی شرایط وقیود افزایش می‌یابند. به‌عنوان مثال، در مدل‌سازی مناسب برای پرتفوی براساس الگوی میانگین- واریانس می‌توان ورودی‌ها و خروجی‌ها را به ترتیب شاخص‌های گوناگون ریسک و بازده در نظر گرفت. ۶- مجموعه فرصت های سرمایه‌گذاری را می‌توان به‌عنوان مجموعه امکان تولید در نظر گرفت که هم می‌تواند شامل تنوع بخشی کامل یا ناکامل باشد.۷- با نمونه‌گیری مناسب و استفاده از نمونه‌های شبیه‌سازی و تکرار نمونه‌گیری با جایگذاری از مجموعه داده‌های واقعی مشکل توزیع داده‌ها را در مدل‌های پارامتری با مدل‌های DC-DEA در تقریب توزیع احتمال امتیاز کارایی حل نمود. در مقالات مختلف مدل‌های گوناگون TDEA آزمون‌های سنجش کارایی براساس مدل‌های سنتی DEA و مدل‌های تعمیم یافته متنوع سازی پرتفوی DC-DEA مورد استفاده قرار گرفته اند[4-2]. یکی از محک‌های آزمون‌های کارایی DEA، آزمون‌های سنجش کارایی مغلوب تصادفی پرتفوی می-باشند که در مقالات بسیاری به‌عنوان محک مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

**۲. نتایج اساسی**

در این قسمت به معرفی برخی مدل‌های مبتنی بر متنوع‌سازی DC-DEA پرداخته می‌شود. در مدل-های این قسمت اندازه انحراف و شاخص‌های انسجام ریسک اصلی‌ترین قسمت هستند. برای مشاهده ویژگی آن‌ها [3-2] را ببینید. هر اندازه انحراف کلی $X_K$ (GDA) در شرط $\sum_{i=1}^{n} X_i X_k(R_i) \geq X_k(\sum_{i=1}^{n} X_i R_i)$ صدق می کند که $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1,\ X_i \geq 0$ است.

مجموعه امکان تولید پرتفوی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PPS_{DC} = \left\{\left(X_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right),\ldots,X_K\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right),\ldots,Y_1(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i),\ldots,Y_k(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i)\right)\right\}$$

متنوع‌سازی کامل و محدود که به ترتیب با $X_{FD}$ و $X_{LD}$ نمایش داده می‌شود نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد که $\delta$ در $X_{LD}$ تعداد دارایی‌هاست:

$$X_{FD} = \left\{\sum_{i=1}^{n} R_i X_i : \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\right\},$$

$$X_{LD} = \left\{\sum_{i=1}^{n} R_i X_i : \sum_{i=1}^{n} X_i = 1, X_i \geq 0, X_i \leq Y_i; Y_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq \delta\right\}$$

www.SID.ir

Archive of SID



دو مدل ورودی و خروجی محور **DC-DEA** تحت بازده به مقیاس ثابت و فاصله جهتی بدون ماهیت که از آورده شده است.

مدل ورودی- خروجی DC-DEA (CRS)[4]

$$\tilde{\theta}_{I-O}(X_O) = \min_{\theta,\varphi,X} \frac{\theta}{\varphi}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\varepsilon_i(X) \geq \varphi.\varepsilon_i(X_O), \qquad i = 1,\ldots,S$$

$$X_K(X) \leq \theta.X_K(X_O), \; k = 1,\ldots,K \qquad (۲\text{-}۲)$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \varphi \geq 1$$

$$X \in X_{FD}$$

## مدل DC-DEA بدون ماهیت[3]

$$\theta_{SSD}(X_O) = \min_{\theta_k,\varphi,X_j} \frac{1 - \frac{1}{T-1}\sum_{k=1}^{T-1}\theta_k}{1+\varphi}$$

$$\text{s.t.}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i X_i\right) \geq E(X_O) + \varphi.e(X_O)$$

$$CVaR_{k/T}(\sum_{i=1}^{n} R_i X_i) \leq CVaR_{k/T}(X_O) - \theta_K.d_k(X_O), \; k=1,\ldots,T-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1, \quad X_i \geq 0, \varphi \geq 0, \theta_k \geq 0$$

آن $K = T-1$ و $\alpha \in \left(1/T, \ldots, T-1/T\right)$

$$e(X_O) = \max_{X \in X_F} E[X] - E[X_O], \; d_k = CVaR_{k/T}(X_O) - \min_{X \in X_F} CVaR_{k/T}$$

جدول۱. مقایسه کارایی های SSD و کارایی های حاصل از DEA

| SSD | | DC-DEA | | T-DEA | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| پرتفوی | محدب | I-O | I | CRS | VRS | |
| ناکارا | کارا | 0.89 | 0.89 | 1.00 | 1.00 | صنایع غذایی |
| ناکارا | کارا | 0.82 | 0.82 | 0.92 | 1.00 | آبجو |
| کارا | کارا | 1.00 | 1.00 | 0.82 | 1.00 | دخانیات |

**تعریف۱.** یک پرتفوی $\Pi \in X_{FD}$ را پرتفوی کارای SSD نامند، هرگاه وجود نداشته باشد پرتفوی $\Pi' \in X_{FD}$ به‌طوری که $r'\Pi' \succ_{SSD} r'\Pi$

جدول۲ چند مدل DC-DEA و ویژگی‌های آن‌ها

www.SID.ir

Archive of SID



| نوع مدل | مدل DC-DEA | ورودی | خروجی | کاربرد | نوع سنجش کارایی |
|---|---|---|---|---|---|
| فاصله جهتی(برنامه‌ریزی صحیح- مختلط مناسب برای مسائل با ابعاد بزرگ) | کارایی پرتفوی براساس مدل میانگین- واریانس | VaR(می تواند منفی باشد) | بازده( دارای توزیع گسسته متناهی $p_s \geq 0$ و $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$ | 48 شرکت آمریکایی مشاهدات 10 سال به صورت ماهانه (2014-2004) | قوی |
| غیر شعاعی و غیر خطی فاصله جهتی | DC-DEA بر مبنای فاصله و جهت | CVaR (شاخص انسجام ریسک ) می‌تواند منفی باشد. | بازده( دارای توزیع گسسته متناهی $p_s \geq 0$ و $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$ | 48شرکت آمریکایی مشاهدات 10 سال به صورت ماهانه(2002-2011) | قوی |
| شعاعی(ورودی- خروجی محور) | - | انحرافات محدب(بخش مثبت) | بازده مقعر | 48 شرکت آمریکایی از ژانویه تا دسامبر2011(به صورت ماهانه) | ضعیف |

توسیعی بر مدل‌های حاضر می‌تواند تجزیه و تحلیل این مدل‌ها از دیدگاه بازده به مقیاس در مرز مرتبط با DEA باشد.


1. M. Branda, M. Kopa,. On relations between DEA-risk models and stochastic dominance efficiency tests, Central European Journal of Operations Research,22(2014).,13-35.
2. M. Branda, Mean value risk portfolio efficiency: approaches based on data envelopment analysis models with negative data and their empirical behavior,A Quarterly Journal of Operations Research., (2015), 296-05.
3. M. Branda, Diversification- consistent data envelopment analysis based on directional-distance measures, Omega., 52 (2015), 65-76.
4. M.Branda, Reformulation of input- output oriented DEA tests with diversification. Operational research letters., 41(5) (2013), 516-520


www.SID.ir