کاربرد روش توابع پایه شعاعی برای قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی تحت مدل دارایی پایه پرش انتشار

عبدالساده نیسی[1] ، سینا عنایت اللهی[2*]

[1] دانشیار دانشکده علوم ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی
a_neisy@atu.ac.ir

[2] کارشناسی ارشد ریاضیات مالی دانشگاه علامه طباطبائی

Sina.enayat2014@gmail.com

چکیده: در این مقاله در نظر داریم یک برگه اختیار اروپایی را تحت مدل دارایی پایه پرش انتشار با استفاده از درون‌یابی توابع پایه شعاعی قیمت‌گذاری کنیم. مدل حاصل یک مسئله مقدار اولیه و مرزی است. پس از شناسایی معادله حاکم که یک معادله دیفرانسیل-انتگرال_جزئی(**PIDE**) بوده و مدل‌سازی معادله مذکور، با استفاده از نرم‌افزار متلب (**MATLAB**) و به کار بردن روش توابع پایه شعاعی هم‌مکانی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل پرش-انتشار مرتون، مدل مذکور را پیاده می‌کنیم. دقت تقریب بالا، سادگی پیاده‌سازی عددی و سادگی روش بدون شبکه توابع پایه‌ای شعاعی هم مکانی جزء مزیت‌های عمده این روش تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل انتگرال_جزئی است**.**با چنین پژوهشی می‌توان نقطه شروعی برای محققین ریاضی کاربردی به وجود آورد که بتوانند روش‌های ریاضی را در بازارهای مالی کاربردی کنند.طرح این‌گونه مسائل و تولید نرم‌افزار موردنیاز به فعالان بازارهای مالی در جهت پیش‌بینی قیمت و تجزیه‌و تحلیل بازارها کمک فراوان خواهد شد.

کلمات کلیدی: اختیارات اروپایی.مدل پرش انتشار.توابع پایه شعاعی،معادلات دیفرانسیل انتگرال_جزئی

طبقه‌بندی موضوعی: طبقه‌بندی JEL : G 13. G12. C6

مقدمه

روش بدون شبکه برای حل یک مسئله روشی است که بدون استفاده از یک شبکه‌بندی از قبل تعیین‌شده برای گسسته سازی دامنه، مسئله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی از معروف‌ترین روش‌های بدون شبکه هستند که در ریاضیات مالی کاربرد زیادی دارند.

۲.معادله دیفرانسیل انتگرال_جزئی برای قیمت‌گذاری اختیارات تحت مدل پرش_ انتشار

اگر P_t فرآیند قیمت اختیار فروش تحت اندازه ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ تعریف‌شده باشد،توسط :

$$P_t = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)} H\ (S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

[*] سخنران

بطوریکه $H(S_T)=\max(0,K-S_T)$ تابع بازده نهایی است.به‌وسیله‌ی خاصیت مارکوف ما تعیین می‌کنیم $P_t=P(t,S_T)$،بطوریکه

$$P(t,S)=\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}H(S_T)\middle|S_t=S\right)]$$

که $P(t,S)$ منجر به PIDE (۲،۱) در بخش زیر می‌شود [4].

۱-۲.مدلسازی PIDE با استفاده از مدل لوی نمایی

مدل لوی نمایی را در نظر بگیرید $S_t=S_0\exp(rt+X_t)$ که فرآیند لوی X_t دارای فضای لوی سه تایی (σ^2,γ,ν)وصدق می کند در $\int_{|x|>1}e^{2x}\nu(dx)<\infty$. اگر

$$\sigma>0\ or\ \exists\beta\in(0,2)\,s.t.\lim_{\epsilon\downarrow 0}inf\,\epsilon^{-\beta}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}|x|^2\nu(dx)>0,$$

پس ارزش اختیار اروپایی با بازده نهایی $H(S_T)$ بوسیله ی $P(t,S)$ داده شده،

بطوریکه $P:[0,T]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$،

$$(t,S)\mapsto P(t,S)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[H(S_T)\middle|S_t=S\right)$$

روی $[0,T]\times[0,\infty)$ پیوسته است و $C^{1,2}$ روی $(0,T)\times(0,\infty)$و برمعادله دیفرانسیل انتگرال_جزئی دلالت دارد

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}(t,S)+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2P}{\partial S^2}(t,S)+rS\frac{\partial P}{\partial S}(t,S)-rP(t,S)\\&+\int_{\mathbb{R}}\left[P(t,Se^x)-P(t,S)-S(e^x-1)\frac{\partial P}{\partial S}(t,S)\right]\nu(dx)=0\end{aligned}\qquad(۲،۱)$$

روی $[0,T)\times(0,\infty)$ با شرایط نهایی $P(T,S)=H(S)$ برای همه ی $S>0$.اگر از تغییر متغیرهای زیر در (۲،۱) استفاده کنیم، داریم :

$$\tau=T-t,\quad x=\ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$$

و می توان نوشت $u(\tau,x)=P(T-\tau,S_0e^x)$ که راه حلی است از PIDE با ضرایب ثابت،

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau,x)=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,x)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\zeta\right)\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,x)$$
$$-(r+\lambda)u(\tau,x)+\lambda\int_{\mathbb{R}}u(\tau,z)f(z-x)dz \qquad (۲,۲)$$

روی $(0,T]\times(-\infty,\infty)$ باشرایط اولیه ی $u(0,x)=h(x)$ که $h(x)=H\left(S_0e^x\right)$ ، $\zeta=\int_{\mathbb{R}}(e^x-1)f(x)dx$ با تابع توزیع پرش $f(x)$ ، و با شدت پرش λ [1],[2],[3].

۳. نتایج اساسی

بازه ی $\Omega=[a,b]$ را به N زیربازه افراز می کنیم ،فرض کنید جواب تقریبی معادله (۲,۲) به شکل معادله $U=\sum_{j=1}^{N}C_j\phi\left(x-x_j\right)$ باشد. لذا خواهیم داشت $U=AC$ ،$U_x=A_xC$ ،$U_{xx}=A_{xx}C$ صورت ماتریس تقریبی تابع و مشتقات آن است که $A_{ij}=\varnothing_{ij}$ ، $A_x=\varnothing_{ij}^x$ و $A_{xx}=\varnothing_{ij}$. حال روابط فوق را در (۲,۲) جایگذاری می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}A_{xx}A^{-1}U+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\zeta\right)A_xA^{-1}U-(r+\lambda)U+\lambda\mathcal{L}A^{-1}U$$ که در آن $\mathcal{L}$

ماتریسی است که عناصر آن به صورت زیر بدست می آید :

$$\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{N}C_j\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(x-x_j\right)f\left(z-x_j\right)=\ C=\ A^{-1}U$$

بنابراین

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\left(\frac{\sigma^2}{2}A_{xx}A^{-1}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\zeta\right)A_xA^{-1}-(r+\lambda)U+\lambda\mathcal{L}A^{-1}\right)U:=VU \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}=VU\ .$$

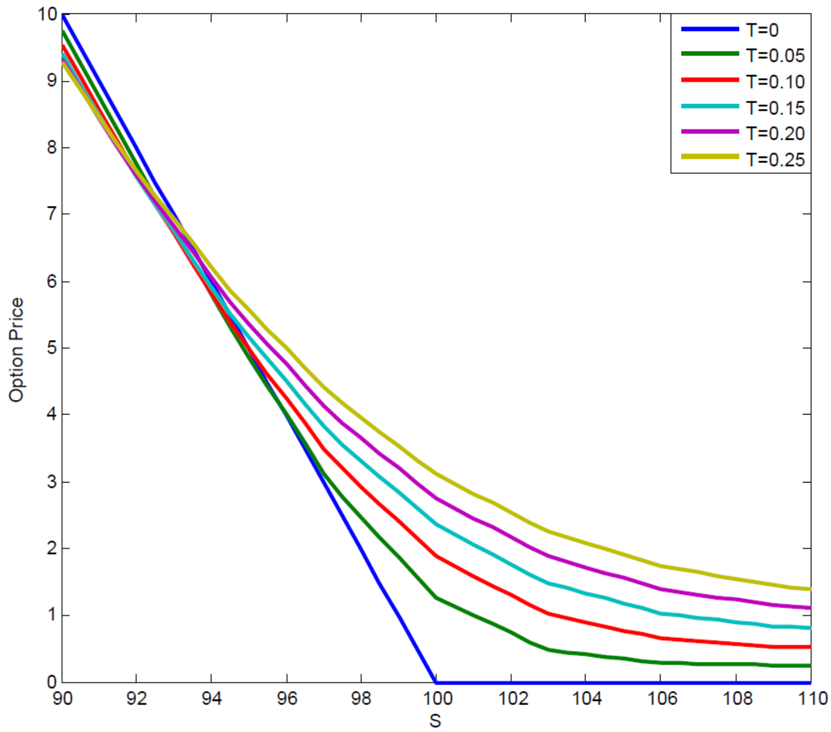
در نهایت سیستم ODE حاصل را با روش رانگ کاتای مرتبه ۴ حل می کنیم.

۴.نتایج عددی

مثال: قیمت گذاری اختیار معامله ی اروپایی تحت مدل پرش انتشار مرتون* با پارامتر های زیر در نظر می گیریم:

$$\sigma=0.15,\quad r=0.05,\quad \sigma_J=0.45,\quad \mu_J=-0.90,\quad \lambda=0.10,\quad T=0.25,$$
$$K=100\ ,S_0=K\ ,\ \varphi(r)=\left(1+c^2r^2\right)^{-2},C=10$$

* Merton jump-diffusion model , $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2n\sigma_j^2}}e^{\frac{-\left(x-\mu_j\right)^2}{2\sigma_j^2}}$



شکل ۱: نمودار قیمت اختیار معامله براساس تغییرات قیمت دارایی پایه درزمان های متفاوت

مرجع‌ها

[1] K. YongHoon, and Y. Lee. "A second-order finite difference method for option pricing under jump-diffusion models." *SIAM Journal on Numerical Analysis* 49.6 (2011): 2598-2617.

[2] C. Ron Tat Lung, and S. Hubbert. "Options pricing under the one-dimensional jump-diffusion model using the radial basis function interpolation scheme." *Review of Derivatives Research* 17.2 (2014): 161-189.

[3] S. G. Kou. "A jump-diffusion model for option pricing ."*Management Science*, 48(8):1086–1101, August 2002

[4] C. Rama, and E. Voltchkova. "Integro-differential equations for option prices in