ارزش‌گذاری اوراق بهادار شرکت‌ها

کاظم نوری هفت چشمه، ام البنین بشیری گودرزی*
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان

چکیده: در این مقاله ارائه یک روش شبه تحلیلی مبتنی بر برنامه‌ریزی پویای مزدوج با تعداد عناصر متناهی، به منظور ارزش‌گذاری اوراق بهادار به عنوان مشتقه‌ای از دارایی‌های شرکت، مدنظر می‌باشد. همچنین ساختار دامنک‌های ثمر و محاسبه احتمال‌های نکول مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مطالعه سبدهای بدهی قراردادی با استفاده از اوراق قرضه باتقدم و اوراق قرضه بی‌تقدم به ساخت مدل و بیان ویژگی‌های توابع بدهی و سرمایه مبادرت گردیده و سپس فرایند تجدید سازمان با در نظر گرفتن دوره‌های مهلت یک شرکت جهت فراخوانی و با تمرکز روی انجام معامله بین دارندگان درخواست تحت نکول، بررسی خواهد شد. در نهایت با تحلیل عددی مدل‌های مختلف و مقایسه مقادیر برنامه‌ریزی پویا به نشان دادن قابلیت انعطاف‌پذیری و کارایی روش ارائه شده می‌پردازیم و با انجام یک تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای ورودی، عامل اصلی نکول یک شرکت شناسایی می‌گردد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی پویا، اوراق بهادار شرکت، مشتقات
طبقه‌بندی موضوعی: 49L20 ،C61، G10

۱- مقدمه و بیان مسئله

الگوی ارزش‌گذاری اوراق بهادار شرکت‌ها مبنی بر اختیارات به مطالعات مرتون (۱۹۷۴) برمی‌گردد [۱] . او یک سهام را مانند یک اختیار خرید اروپایی روی دارایی‌های شرکت بررسی می‌کند که از یک حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند، همان‌طور که به وسیله بلک و شولز بیان گردید. مقاله پیشگام مرتون یک مدل ساختاری معروف بود که اوراق بهادار شرکت‌ها را به عنوان مشتقات ارزش دارایی شرکت بیان نمود. بلک و کاکس (۱۹۷۶) مدل مرتون را گسترش داده و یک مدل ساختاری به فرم بسته حل کردند [۲]. لیلاند (۱۹۹۴) سودهای مالیاتی تحت پیشامد بقا و هزینه‌های ورشکستگی تحت پیشامد نکول را بررسی می‌کند [۳]. نیوروژین (۲۰۰۵) با شروع از چارچوب لیلاند، هزینه‌های ورشکستگی برای سبدهای اوراق قرضه بدون پوشش در دستگاه بلک-کاکس را معرفی می‌کند [۴]. لیلاند و تفت (۱۹۹۶) یک کوپن اوراق قرضه با سررسید متناهی که در طول حیات شرکت

* سخنران

به مدت طولانی تجدید شده است را بررسی می‌کنند [۵] و چن و کو (۲۰۰۹) پویایی انتشار کامل ارزش دارایی شرکت لیلاند و تفت را به یک فرایند انتشار پرش نمایی دوتایی تغییر می‌دهند، سپس بدهی را در یک فرم بسته ارزیابی می‌کنند [۶].

دو رویکرد کلی برای تحلیل فرایندهای تجدید سازمان وجود دارد. برخی از پژوهشگران روش تحلیلی را تحت دستگاهی شبیه بلک -کاکس یا دستگاه لیلاند توسعه دادند. دومین رهیافت تحقیق روش‌های عددی از جمله انتگرال عددی، تفاضلات متناهی ، درخت دو جمله‌ای، برنامه‌ریزی پویا و شبیه سازی مونت کارلو است [۷،۸].

در این مقاله ابتدا مدلی برای بررسی سبدهای بدهی قراردادی با فرضیات مشخص ارائه و سپس فرایند تجدید سازمان با در نظر گرفتن دوره‌های مهلت یک شرکت جهت فراخوانی و با تمرکز روی انجام معامله بین دارندگان درخواست تحت نکول، بررسی می‌گردد. یک شرکت عمومی با سبدی از اوراق قرضه باتقدم و بی‌تقدم در نظر می‌گیریم. فرض کنید $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n,\dots,t_N=T\}$ مجموعه‌ای از تاریخ‌های پرداخت باشد. اگر برای $n=1,\dots,N$، d_n^s و d_n^j به ترتیب خروجی‌های تولید شده در زمان $t_n\in P$ به وسیله‌ی اوراق باتقدم و بی‌تقدم باشد و $d_0^s+d_0^j=d_0\geq 0$، شرکت متعهد شده است که $d_n^s+d_n^j=d_n>0$ به دارندگان اوراق بپردازد. بعلاوه فرض کنید ارزش دارایی شرکت برای $t\in[0,T]$، $\{A_P\}$ باشد که دارای توزیع لگ نرمال است و $A_0>0$، همچنین $TB_t(a)$، $BC_t(a)$، $D_t^s(a)$، $D_t^j(a)$ و $S_t(a)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی ارزش فعلی سودهای مالیات، هزینه‌های ورشکستگی، بدهی باتقدم ، بدهی بی‌تقدم و سرمایه باشند و ارزش بدهی کل برابر به ازای $a=A_t$، $D_t^j(a) + D_t^s(a) = D_t(a)$ باشد.

با توجه به [۳]، رابطه تعادل ترازنامه عبارت است از:

$$a+TB_t(a)-BC_t(a)=D_t(a)+S_t(a) \qquad (۱)$$

که $t\in[0,T]$ و سمت راست معادله (۱) جمع ارزش شرکت و $a=A_t$ مؤلفه بیرونی آن است. سودهای مالیات به عنوان یک درخواست با یک جریان نقدی شناخته شده $tb_n=r_n^c d_n^{\text{int}}$ تحت بقا در t_n مشخص شده است. نرخ $r_n^c\in[0,1]$ نرخ مالیات شرکت‌ها در فواصل معین $[t_n,t_{n+1}]$ برای $n=0,\dots,N-1$ است و هزینه ورشکستگی به عنوان یک مطالبه با جریان نقدی wA_τ تحت نکول است و τ زمانی است که نکول شرکت فرا می‌رسد. فرایند حالت $\{A_P\}$، فرایند مارکوف اکیدا مثبت است با احتمال‌های انتقال

$$T^0_{abc\Delta}=E^*\left[I(b<A_u\leq c)|A_t=a\right]=P^*\left(A_u\in(b,c]|A_t=a\right) \qquad (۲)$$

$$T^1_{abc\Delta}=E^*\left[A_u I(b<A_u\leq c)|A_t=a\right] \qquad (۳)$$

که $t_n<t\leq u\leq t_{n+1}$، $\Delta=u-t$، $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ و $E^*[\cdot|A_t=a]$ نماد امید شرطی تحت اندازه احتمال ریسک خنثی $P^*(.)$ بوده و $I(.)$ تابع نشانگر است. برای فرایندهای مارکوف زمان- ناهمگن تبدیل پارامترها وابسته به t است [۹].

معادلات (۲) و(۳) مشتمل بر خانواده بزرگی از فرایندهای انتشار کامل، انتشار پرش و بیشتر فرایندهای اصلی مارکوف است [۱۰،۹]. تمرکز این مقاله روی حرکت براونی هندسی با $A_u=A_t e^{\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(u-t)+\sigma\sqrt{u-t}\,Z_{n+1}}$ به ازای $t_n<t\leq u\leq t_{n+1}$ و $A_{t_0}>0$ می باشد که r نرخ بهره بدون ریسک، δ نسبت پرداخت سود سهام، σ نوسان‌پذیری ارزش دارایی شرکت و Z_{n+1} یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

۲- نتایج اصلی

در این بخش به بررسی تحلیلی احتمال‌های نکول و محدوده آن و ویژگی‌های تابع بدهی تحت مفروضات مشخص می‌پردازیم.

قضیه۱: توابع مقدار وابسته به $a=A_t$ در زمان‌های $t\in[0,T]$، پیوسته هستند و در معادله (۱) صدق می‌کنند. بعلاوه توابع مقدار بدهی و سرمایه در زمان t توابع صعودی از $a=A_t$ هستند و نکول به طور محتمل تنها در یک تاریخ پرداخت از $\{a=A_{t_n}\le b_n^*\}$ رخ می‌دهد که در اینجا b_n^*محدوده نکول درونی در $t_n\in P$ به ازای $n=0,\ldots,N$ می باشد.

اثبات: اثبات به کمک استقرا انجام می‌شود. طبق معادله (۱) در زمان t_N داریم:

الف) اگرشرکت در زمان $t_N=T$ پابرجا باشد، یعنی:

$$TB_{t_N}(a)=tb_N \quad , \quad BC_{t_N}(a)=0 \quad , \quad D^s_{t_N}=d^s_N \quad , \quad D^j_{t_N}=d^j_N$$

$$S_{t_N}(a)=a+tb_N-D_{t_N}(a)=a+tb_N-d_N>0 \tag{۴}$$

عایدی دارندگان اوراق باتقدم و بی‌تقدم است و آنچه باقی می‌ماند متعلق به دارندگان سرمایه است.

ب) اگر شرکت در زمان $t_N=T$ نکول نماید، یعنی:

$$TB_{t_N}(a)=0 \quad , \quad BC_{t_N}(a)=wa \quad , \quad D^s_{t_N}=\min\left(a(1-w),d^s_N\right) \quad ,$$

$$D^j_{t_N}=\max\left(0,a(1-w)-D^s_{t_N}(a)\right) \quad , \quad S_{t_N}(a)=0 \tag{۵}$$

با ترکیب دو مورد بالا می‌توانیم سهام را به عنوان یک اختیار خرید روی دارایی‌های شرکت تفسیر کنیم و بنابراین برای $a>0$ $S_{t_N}(a)=\max\left(0,a-(d_N-tb_N)\right)$. با توجه به قیمت گذاری بدون آربیتراژ و تعادل ترازنامه در t_{n+1} داریم [۱]:

$$E^*\left[\rho\left(A_{t_{n+1}}+TB_{t_{n+1}}\left(A_{t_{n+1}}\right)-BC_{t_{n+1}}\left(A_{t_{n+1}}\right)\right)\middle| A_{t_n^+}=a'\right]=D^s_{t_n^+}\left(a'\right)+D^j_{t_n^+}\left(a'\right)+S_{t_n^+}\left(a'\right) \tag{۶}$$

که تعادل ترازنامه در t_n^+ را نتیجه می‌دهد. همین معادله برابری را در هر زمان $t\in(t_n,t_{n+1}]$ نشان می‌دهد و با فرض $P^*\left(S_{t_{n+1}}\left(A_{t_{n+1}}\right)>0\right)=P^*\left(A_{t_{n+1}}>b^*_{n+1}\right)>0$ نکول بعد از آن نمی‌تواند رخ دهد. همچنین با روند پسرو از t_n^+ به t_n داریم:

$$a+TB_{t_n}(a)-BC_{t_n}(a)=D^s_{t_n}(a)+D^j_{t_n}(a)+S_{t_n}(a)$$

که نابرابری

$$S_{t_n}(a)=S_{t_n^+}(a')-d_n>0$$

پیشامد بقا در t_n را نشان می‌دهد، پس شرکت در زمان t_n پا برجاست اگر و تنها اگر ارزش دارایی‌های شرکت در زمان t_n از میزان توانایی پرداخت بدهی شرکت در این زمان فراتر باشد [۲]. ساختار ما تعادل ترازنامه را در هر زمان حفظ می‌کند و نشان می‌دهد همه توابع در t_n به $a=A_t$ وابسته بوده و توابعی صعودی از $a=A_t$ می‌باشند، پیوستگی نیز با استفاده از قضیه مغلوب لبگ ثابت می‌شود.

قضیه۲: برای $t\in[0,T]$ تابع مقدار بدهی $D_t(.)$ در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{a\to 0} D_t(a)=0 \quad , \qquad \lim_{a\to\infty} D_t(a)=M_t=\sum_{t_n\geq t} d_n e^{-(t_n-t)r}.$$

بنابراین برای $a=A_t$ به اندازه کافی بزرگ، شرکت بدون ریسک است.

اثبات: با استفاده از قضیه ۱و قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ داریم:

$$t\in(t_n,t_{n+1}) \text{ و } D_t(a)=E^*\left[e^{-r(t_{n+1}-t)}D_{t_{n+1}}\left(a e^{\left(r-\sigma^2/2\right)(t_{n+1}-t)+\sigma\sqrt{t_{n+1}-t}Z}\right)\right]$$

همچنبن به کمک قضیه مغلوب لبگ و پیوستگی $D_{t_{n+1}}(.)$: $\quad \lim_{a\to 0} D_t(a)=0$

$$\lim_{x\to\infty} D_t(a)=E^*\left[e^{-r(t_{n+1}-t)}\lim_{a\to\infty} D_{t_{n+1}}\left(a e^{\left(r-\sigma^2/2\right)(t_{n+1}-t)+\sigma\sqrt{t_{n+1}-t}Z}\right)\right]$$

$$=E^*\left[e^{-r(t_{n+1}-t)}M_{t_{n+1}}\right]=e^{-r(t_{n+1}-t)}M_{t_{n+1}}$$

که با توجه به نتایج قضیه قبل در زمان نکول $\lim_{a\to 0} D_{t_n}(a)=0$ و در نهایت:

$$\lim_{a\to 0} D_{t_n}(a)=e^{-r(t_{n+1}-t)}M_{t_{n+1}}+d_n=M_{t_n}.$$

در حالت کلی برای مفهوم احتمال نکول دو تعریف داریم، یکی بدون شرط و دیگری با احتمال شرطی است:

$$TDP_n=P^*\left(\cup_{i=1}^n\left\{A_{t_i}\leq b_i^*\right\}\right)=1-P^*\left(A_{t_1}>b_1^*,\dots,A_{t_n}>b_n^*\right),$$

$$n=1,\dots,N \quad CDP_n=\frac{P^*\left(A_{t_1}>b_1^*,\dots,A_{t_{n-1}}>b_{n-1}^*,A_{t_n}\leq b_n^*\right)}{P^*\left(A_{t_1}>b_1^*,\dots,A_{t_{n-1}}>b_{n-1}^*\right)}=1-\frac{P^*\left(A_{t_1}>b_1^*,\dots,A_{t_n}>b_n^*\right)}{P^*\left(A_{t_1}>b_1^*,\dots,A_{t_{n-1}}>b_{n-1}^*\right)}$$

نتیجه۱: فرض کنید $\{Y\}$ یک حرکت براونی هندسی با یک وضعیت ابتدایی Y_{t_0} ، بازده μ، نوسان پذیری σ و $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ باشد. در نتیجه: $P\left(Y_{t_1}>c_1,\dots,Y_{t_n}>c_n\right)=\Phi\left(c_1',\dots,c_n'\right)$ که برای $m=1,\dots,n$،

$$c_m'=\frac{\log\left(Y_{t_0}/c_m\right)+\left(\mu-\sigma^2/2\right)t_m}{\sigma}$$

و $\Phi(.)$ تابع توزیع نرمال چند متغیره با $N\left(0,\Sigma=CC^T\right)$ و

$$C=\begin{bmatrix}\sqrt{t_1-t_0} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{t_1-t_0} & \sqrt{t_2-t_1} & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\ \sqrt{t_1-t_0} & \sqrt{t_2-t_1} & \dots & \sqrt{t_{n-1}-t_{n-2}} & 0\\ \sqrt{t_1-t_0} & \sqrt{t_2-t_1} & \dots & \sqrt{t_{n-1}-t_{n-2}} & \sqrt{t_n-t_{n-1}}\end{bmatrix}$$

است.

۳- فرایند تجدید سازمان

یک فرایند نکول معمولا بوسیله یک تسویه دنبال می‌شود اما می‌توانیم قبل از تسویه فرایند تجدید سازمان را انجام دهیم که یک تلاش برای بقای شرکت و تقویت توانایی‌های شرکت در بازپرداخت‌های آینده باشد. طراحی تجدید سازمان ما به دو پارامتر وابسته است، یکی حداکثر تعداد دوره‌های مهلت که یک شرکت می‌تواند ایجاب کند و دیگری قسمتی از بدهی است که بدهکاران پرداخته‌اند.

۳-۱- تحلیل حساسیت و نتیجه‌گیری

با بررسی‌های عددی روی مدل‌های مختلف و مقایسه آنها با برنامه‌ریزی پویا درمی‌یابیم که نه تنها برنامه‌ریزی پویا یک ابزار کمکی مناسب و پایا برای روش‌های تحلیلی است بلکه با توجه به همگرایی آن در صورت وجود شرایط لازم، با وجود خطا در حین اجرای برنامه توانایی و کارایی لازم برای ادامه کار سیستم را به دلیل انعطاف‌پذیری بالا داراست. برای بررسی یک اوراق قرضه کوپن‌دار و سپس بدهی ساخته شده از یک اوراق قرضه کوپن‌دار باتقدم و یک اوراق قرضه کوپن‌دار بی‌تقدم با سررسید طولانی را در نظر می‌گیریم. انجام یک تحلیل حساسیت نسبت به نرخ کوپن اوراق (بی‌تقدم) و سپس ارزش دارایی شرکت نتیجه می‌دهد که جمع ارزش شرکت که با اجزای بیرونی کاهش می‌یابد از ساختار سرمایه شرکت مستقل است. بعلاوه نرخ بازده مورد انتظار اوراق قرضه y (درصد در سال) به عنوان تابعی از نرخ کوپن اوراق c (درصد در سال) بی‌کران است و ارزش خالص فعلی اوراق با جریان نقدی تعهد شده به صورت زیر است:

$$D_0=\left[\sum_{n=1}^{N} c\times e^{-y\times n}+e^{-y\times N}\right]\times P(\text{ر} \qquad)$$

$$\lim_{c\uparrow} S_0=0 \quad , \quad \lim_{c\uparrow} D_0=\lim_{c\uparrow}\overline{A}_0=(1-w)A_0 \quad , \quad \lim_{c\uparrow} TB_0=0 \quad , \quad \lim_{c\uparrow} BC_0=wA_0$$

و احتمال نکول شرکت یک تابع صعودی از نوسان پذیری دارایی شرکت است.

در اینجا یک برنامه‌ریزی پویای انعطاف‌پذیر و عمومی که به کمک تعادل ترازنامه توسعه یافته و با بدهی‌های شرکت‌های اختیاری و فرایند تجدید سازمان منطبق است پیشنهاد داده شد. بررسی‌های تئوریک روی اوراق باتقدم و بی‌تقدم و دیگر ویژگی‌های بدهی و سرمایه، کارایی برنامه‌ریزی پویا را نشان می‌دهد. اما مسئله اصلی این است که اگر بعد فضای حالت‌ها به اندازه کافی بزرگ شود قادر نخواهیم بود تغییرات پارامترها را در کامپیوتر ذخیره کنیم، استراتژی اصلی برای عبور از این مشکل بزرگ استفاده از مشاهده‌های تصادفی فضای حالت به جای مشاهده‌های منظم و ترکیب برنامه‌ریزی پویا با شبیه سازی مونت کارلو به جای روش عناصر متناهی است.

منابع:

1. R. Merton, On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, Journal of Finance, 29(1974), 449-470.
2. F. Black, J. Cox, Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions, Journal of Finance, 31(1976), 351-367.
3. H. Leland, Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, Journal of Finance, 49(1994), 1213-1252.
4. E. Nivorozhkin, Market discipline of subordinated debt in banking: the case of costly bankruptcy. European Journal of Operational Research,161(2005),364–376.
5. H. Leland, K. Toft, Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. Journal of Finance,51(1996),987–1019.
6. N.Chen, S.G. Kou, Credit Spreads, Optimal Capital structure, and Implied Volatility with Endogenous Default and Jump Risk, Mathematical Finance, 19(2009), 343-378.
7. A. Annabi, M. Breton, P. François, Resolution of financial distress under Chapter11. Journal of Economic Dynamics and Control,36(2012),1867–1887.
8. M. Broadie, O. Kaya, A binomial lattice method for pricing corporate debt and modeling Chapter 11 proceedings. Journal of Financial and Quantitative Analysis,42(2007),279–312.
9. H. Ben-Ameur, M. Berton, B. Francois, A dynamic programming approach to price installment options, European Journal of Operational Research, ۱۶۹(۲۰۰۶), 667-676.
10. C. Zhou, The term structure of credit spreads with jump risk, Journal of Banking and Finance, 25(2001), 2015-2040.