Archive of SID

محاسبه‌ی احتمال سرایت نکول در شبکه‌های مالی

حسن داداشی[۱]، سمیرا نورعلی دخت[۲*]
dadashi@iasbs.ac.ir ۱
s.nouralidokht@iasbs.ac.ir۲

چکیده: عدم توانایی در اجرا کردن تعهدات یا نکول شرکت‌ها به طور تصادفی به هم مرتبط است. موسسات مالی به وسیله‌ی یک شبکه در هم تنیده و چند منظوره با همدیگر مرتبط هستند. این حلقه‌های ارتباطی منجر به این می‌شود که سقوط و شکست یک شرکت منجر به فروریختن دیگر شرکت‌ها و موسسات همکار شود. دراین مقاله نتایج مجانبی برای مقدار دقیق سرایت نکول در یک شبکه‌ی بزرگ معاملاتی استخراج می‌شود و برای مقدار مجانبی نکول به بیان تحلیلی می‌پردازیم. معیاری برای مقاومت یک شبکه‌ی بزرگ مالی در عدم توانایی بازپرداخت بدهی‌های خود را معرفی و همچنین سرایت شوک از بخش‌های کوچک به بخش‌های بزرگ را بررسی می‌کنیم.
نتایج این تحقیق بر نقش" پیوندهای مسری" تاکید می‌کند و نشان می‌دهد موسساتی که بیشترین تاثیر را در بی‌ثباتی شبکه دارند ارتباط بیشتری با اعضای شبکه داشته و یا بخش بزرگی از پیوندهای مسری را دربر دارند. در این مطالعه گراف جهت‌دار با دنباله درجات داده شده و توزیع اختیاری از وزن را در نظر می‌گیریم. نتایج مجانبی نشان می‌دهد تطابق خوبی با شبیه‌سازی برای شبکه‌های با اندازه‌های واقع بینانه وجود دارد.

کلمات کلیدی: ریسک سیستمی، سرایت نکول، گراف تصادفی، شبکه بین بانکی، پایداری مالی.
طبقه بندی موضوعی: AMS classification: 91G40

۱ مقدمه

* سخنران

www.SID.ir

Archive of SID

در ادبیات مالی، واژه ریسک با مفاهیمی چون عدم اطمینـان و یـا ضـرر مـورد انتظـار هـم‌معنـی اسـت. اقتصاددانان واژه ریسک را « هر فعالیت یا رخدادی که بتواند در توانایی‌های یک سازمان در رسیدن بـه اهدافش تأثیر منفی بگذارد »و یا «احتمال قابل سنجشی از ضرر یا بازده، کمتر از آنچه که مورد انتظار است » تعریف می‌کنند.

در طول دهه گذشته به ویژه پس از بحران مالی ۲۰۰۷ -۲۰۰۹ ریسک سیستمی در بازارهـای مـالی بـه عنوان یک موضوع مهم پژوهش پدید آمده است. اکنون عموماً پذیرفتـه شـده اسـت کـه عـدم کفایـت سرمایه همراه با درجه‌ی زیادی از ارتباط درسیستم مالی ممکن است موجب بی ثباتی سیسـتمی شـود. اما همچنان پیدا کردن رابطه‌ی دقیق بین انتشـار بحـران در شـبکه‌ی مـالی و کمیـت‌هـای انـدازه‌پـذیر بنگاه‌های مالی و ساختار شبکه‌ی مالی به عنوان چالش باقی مانده است. چنین درکـی در رسـیدگی بـه ریسک سیستمی در چارچوب نظارتی بسیار مهم است. در این تحقیق مدل‌های شبکه‌ای به عنوان یـک چارچوب جالب برای پاسخ دادن به برخی از سوالات مربوط به ریسک سیستمی درنظرگرفته‌شده‌است.

ادبیات فعلی در این موضوع بر روی مدل‌های ساده تاکید کرده‌اند کـه در ایـن مـدل‌هـا نـاهمگونی بـین اعضای شبکه قابل نمایش نمی‌باشد. همچنین این ادبیات یا روی شبیه‌سازی و یا روی تجزیـه و تحلیـل اکتشافی متمرکز شده‌اند. هدف ما در این تحقیق پرداختن به مدل‌های ناهمگن در بین شبکه‌های مالی می‌باشد. ابتدا یک شبکه‌ی بزرگ از بنگاه‌های معاملاتی را فرض می‌کنیم که درآن گره‌ها مؤسسات مالی را نشان می‌دهند و هر پیوند نشان‌دهنده قرارگیری در معرض خطری است که در صـورت نکـول طـرف معامله، متوجه بنگاه می‌شود.

به کمک روش‌های مجانبی برای شبکه‌های بزرگ، شدت فرآیند سرایت نکول را بررسی کرده و مقامت شبکه در برابر سرایت نکول را باتوجه به ساختار آن بررسی می‌کنیم. در این تحقیق اهداف زیر را دنبال می‌کنیم:

۱. تحلیل انتشار بحران در یک سیستم مالی به عنوان نماینده‌ی یک شبکه‌ی بزرگ

۲. بیان مجانبی برای مقدار ریزش نکول طبق ویژگی‌های دنباله درجه ها، شدت در معرض خطر گره‌ها و دنباله سرمایه بنگاه‌ها پس از شوک خارجی.

۳. تایید نتایج مجانبی بدست آمده با مطالعه شبیه سازی سرایت در یک شبکه با اندازه‌های بزرگ واقعی

۴. پیش‌بینی گسترش بحران در یک شبکه با اندازه گیری‌هایی از تاب‌آوری

۵. شناسایی مراکزی که با بخش بزرگی از پیوندهای مسری در ارتباط هستند .

۱,۱ تعاریف اولیه

دراین تحقیق از مفاهیم احتمالاتی و گراف برای ایجاد شبکه‌ی مالی استفاده کرده‌ایم. دانستن مفاهیم اولیه‌ی زیر برای ادامه‌ی تحقیق لازم و ضروری است.

www.SID.ir

Archive of SID

تعریف ۱ . ۱. گراف G با n رأس و m یال متشکل از مجموعه رأس‌های $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)=\{e_1,\dots,e_m\}$ است که در آن هر یک یال یک جفت نامرتب از رأس‌هاست. اگر تمام یال‌های گراف، جهت‌دار باشند آن را گراف جهت‌دار گوییم.

تعریف ۲ . ۱. درجه‌ی یک رأس مانند v تعداد یال‌هایی است که بر v واقع شده‌اند و با $\deg(v)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳ . ۱. گراف وزن‌دار، گرافی است که یک شماره(یا وزن) به هر رأس آن اختصاص داده شده باشد. چنین وزن‌هایی ممکن است برای مثال، هزینه، طول، ظرفیت و یا غیره را نشان دهند.

پیوند شبکه‌ای از موسسات مالی با گراف جهت‌دار وزنی مشخص می‌شود که در آن عناصر(رأس‌ها) موسسات مالی را نشان‌می‌دهند.

ماتریس مواجهه(قرار گیری در معرض ریسک)با e عضوی از فضای اعداد حقیقی $n*n$ است که در آن $e(i,j)$ بیانگر دارایی در معرض خطر موسسه i از موسسه j است. دارایی‌های کل بین بانکی موسسه i توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$A(i):=\sum_j e(i,j)$$

توجه داشته باشید که $\sum_j e(j,i)$ بیانگر بدهی‌های بین‌بانکی موسسه j به موسسه i است. علاوه بر دارایی‌ها و بدهی‌های بین بانکی i، یک موسسه مالی ممکن است دیگر دارایی‌ها و بدهی‌ها را مانند سپرده‌ها ($D(i)$) نیز نگهداری کند. ارزش خالص دارایی‌های موسسه i، توسط سرمایه آن بصورت زیر محاسبه می شود:

$$c(i)=x(i)+\sum_{j\neq i} e(i,j)-\sum_{j\neq i} e(j,i)-D(i)$$

لذا نسبت زیر را داریم:

$$\gamma(i)=\frac{c(i)}{A(i)}$$

$\gamma(i)$ را نسبت سرمایه به سرمایه‌ی بین بانکی گوییم.

تعریف ۴ . ۱. یک شبکه مالی (e,γ) در مجموعه رئوس $V=[n]$ با موارد زیر تعریف می‌شود:

۱. یک ماتریس مواجهه $\{e(i,j)\}_{1\le i,j\le n}$

۲. نسبت سر مایه $\{\gamma(i)\}_{1\le i\le n}$

www.SID.ir

Archive of SID

در این شبکه درجه ورودی از گره i به صورت $d^{-}(i) := \{j \in V \mid e(j,i) > 0\}$ تعریف می‌شود که نشان دهنده تعداد گره‌های در مواجهه با i است و همین‌طور درجه خروجی از این گره $d^{+}(i) := \{j \in V \mid e(i,j) > 0\}$ که نشان دهنده تعداد مؤسسات در مواجهه با i می‌باشد.

مجموعه‌ای از موسسات در ابتدا معسر (مؤسساتی که توانایی پرداخت بدهی‌ها را ندارند ولی در شبکه موجود هستند) با نماد زیر نشان داده می شود:

$$D_0(e,\gamma) = \{i \in V \mid \gamma(i) \le 0\}$$

در این تحقیق سرایت نکول ناشی از $D_0(e,\gamma)$ را بررسی کرده و مقدار آن را در یک شبکه‌ی مالی محاسبه می‌کنیم. در حقیقت هدف ما به دست آوردن نسبت سرایت نکول است که از مجموعه‌ی $D_0(e,\gamma)$ شروع شده است که این نسبت را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\alpha_n(e,\gamma) := \frac{|D_{n-1}(e,\gamma)|}{n}$$

که در آن $D_k(e,\gamma) = \{i \in V \mid \gamma(i)A(i) \le \sum_{j \in D_0} (1 - R(j))\, e(i,j)\}$ می‌باشد. $R(j)$ نرخ بازیابی دارایی موسسه‌ی j ام در صورت نکول می‌باشد.

تعریف ۵ . ۱. پیوند $i \to j$ را مسری گوییم هرگاه با نکول j ، i نیز نکول کند.

قضیه ۱,۱. دنباله $(e_n,\gamma_n)_{n\ge1}$ از شبکه های مالی را درنظر بگیرید. فرض کنید I یک تابع پیوسته‌ی افزایشی است که با مشخص شدن نقطه‌ی ثابتی در آن می‌توان احتمال نکول راس تصادفی انتخاب شده را به‌دست آورد. π^* را کوچکترین نقطه ثابت از I در $[0,1]$ در نظر بگیرید.

۱. اگر $\pi^* = 1$ آن‌گاه به طور مجانبی همه‌ی گره‌ها نکول می‌کنند، $\alpha_n(e_n,\gamma_n) \xrightarrow{p} 1$

۲. اگر $\pi^* < 1$ آن‌گاه کسر مجانبی از نکول مقدار زیر را می‌گیرد:

$$\alpha_n(e_n,\gamma_n) \xrightarrow{p} \sum_{j,k} \mu(j,k) \sum_{\theta=0}^{j} p(j,k,\theta)\beta(j,\pi^*,\theta)$$

که در آن $\mu(j,k)$ توزیع تجربی دنباله درجات با ورودی j و خروجی k و همچنین $p(j,k,\theta)$ نشان‌دهنده‌ی احتمال نکول یک راس با درجات ورودی و خروجی j و k و آستانه‌ی نکول θ می‌باشد. بعلاوه $\beta(j,\pi^*,\theta)$ نشانگر تابع توزیع از متغیر تصادفی دوجمله‌ای $Bin(j,\pi^*)$ می‌باشد.

قضیه ۱,۲. اگر $1 - \sum_{j,k} \frac{jk}{\lambda} \mu(j,k)p(j,k,1) > 0$، اگر درصد تعداد نکول‌های اولیه کمتر از ρ_ε باشد که در آن $\varepsilon > 0$ و λ میانگین متناهی درجات است، آن‌گاه تعداد نکول‌های نهایی قابل چشم پوشی می‌باشد. به‌عبارت دیگربه ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد ρ_ε که درآن اگر درصد نکول اولیه از ρ_ε کوچکتر باشد آن‌گاه کسر نهایی از نکول با احتمال بالا از ε کوچکتر است.

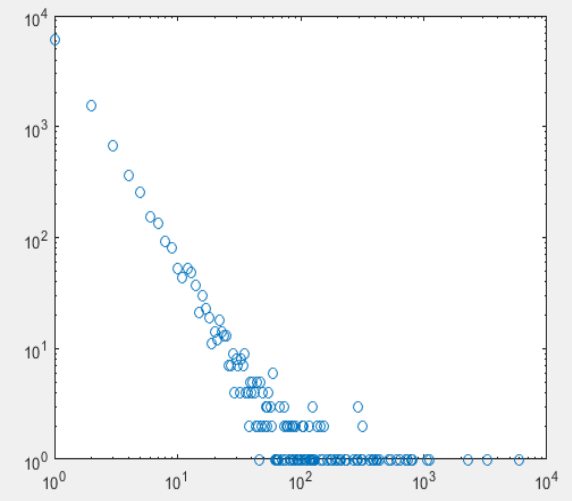
www.SID.ir

Archive of SID

قضیه ۱,۳. اگر $1-\sum_{j,k}\frac{jk}{\lambda}\mu(j,k)p(j,k,1)<0$ آن‌گاه با احتمال بالا مجموعه‌ای از گره‌هایی که تاثیر بالایی در سیستم مالی دارند، وجود دارد که با پیوند سرایت رابطه‌ی قوی دارند به طوریکه هرگره متعلق به این مجموعه می‌تواند نکول را ازهمه گره‌ها آغاز کند. (به طور مثال یک مسیر جهت‌دار از لینک‌های سرایت از همه‌ی گره‌ها به جزء دیگری وجود دارد)

۲ نتایج اساسی

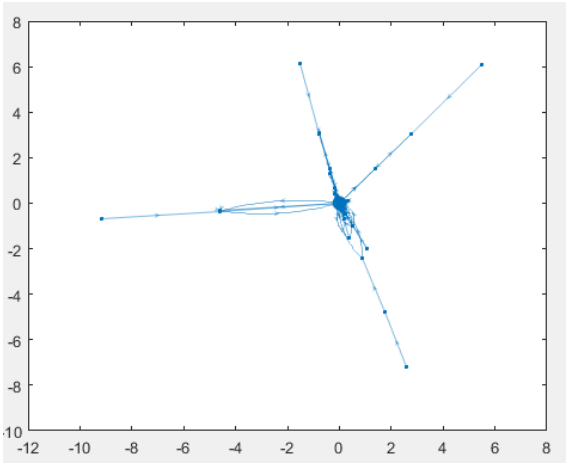
در این بخش نتایج شبیه‌سازی شده را با استفاده از داده‌های تصادفی بیان می‌کنیم.



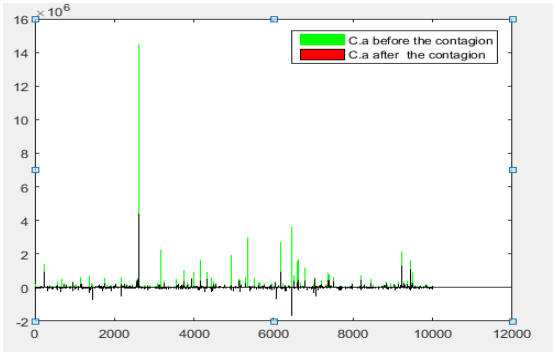
شکل ۱: توزیع درجات خروجی دارای دم پارتو با توان ۱,۹۸

www.SID.ir

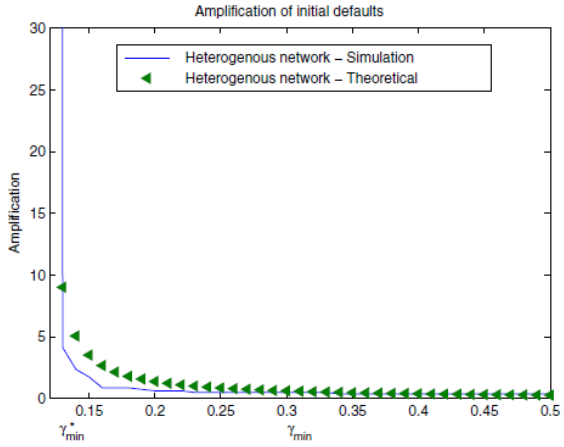
Archive of SID



شکل۲: شبکه ی بین بانکی با درجات خروجی دارای دم پارتو با توان۱,۹۸



شکل۳: سرمایه های در معرض خطر سرایت، قبل و بعد از سرایت نکول
برای تعداد موسسات برابر با ۱۰,۰۰۰



شکل۴: تکثیر سرایت نکول در شبکه های بدون مقیاس با دنباله درجات خروجی و ورودی دارای توزیع پارتو با ضرایب دمی ۱,۹۸و۲,۱۹ و مواجهه ها با توزیع پارتو با ضریب دمی۲,۶۱.

www.SID.ir

Archive of SID

مرجع‌ها

4. R., Cont , H. Amini , A. Minca, "Resilience to Contagion in Financial Networks". Mathematical Finance (2013).
5. F., Allen , D. Gale : "Financial Contagion", J. Polit. Econ. (2000), 108(1), 1–33.
6. R., Cont., A. Moussa, and E.B. Santos :"Network Structure and Systemic Risk in Banking Systems, in Handbook of Systemic Risk", J.-P. Fouque and J. Langsam, eds., Cambridge, (2012).

www.SID.ir