قیمت‌گذاری اختیارات معامله بامانع با استفاده از الگوریتم شانون

امیرتیمور پاینده ، آرمین فرهادی *
amirtpayandeh@sbu.ac.ir
a.farhadi@iasbs.ac.ir

چکیده: در مباحث مربوط به ریاضی مالی و بیمسنجی یافتن توزیع توأم یک فرایند لوی و کرانگین‌های آن همواره مورد توجه بوده است. اهمیت این موضوع به این دلیل است که توزیع توأم گفته شده در حل بسیاری از مسایل از جمله در قیمت‌گذاری انواع دارایی مانند اختیارات معامله کاربرد دارد. همچنین دلیل انتخاب فرایند لوی این است که این فرایند واقعیت‌های موجود در بازارهای مالی را بهتر و دقیق‌تر نشان می دهد. راه‌های متعددی برای به‌دست آوردن این توزیع ارائه شده است. برای مثال می‌توان فرایند لوی را توسط یک قدم زدن تصادفی تقریب زد، مسیرهای مربوط به آن را شبیه‌سازی کرد و بیشترین مقدار را در هر اجرا ثبت کرد که روشی بسیار کند و وقت گیر است. روشی که در این مقاله ارائه می‌شود، از توابع چگالی احتمال کرانگین‌های فرایند لوی مورد نظر کمک می‌گیرد. برای به‌دست آوردن توابع چگالی احتمال مورد نظر، از توابع قطعاً مثبت استفاده می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اختیارات معامله. مساله ریمان-هیلبرت. شبیه‌سازی مونت‌کارلو. تجزیه وینر-هوپف. فرایند لوی.

طبقه بندی موضوعی: 47A68 . 42A82 . 65C05 .35Q15

۱ مقدمه

فرض کنید $X=\{X_t : t\geq 0\}$ یک فرایند لوی باشد[4] که توسط سه تایی (μ,σ,υ) تعریف شده باشد، آنگاه تابع مشخصه این فرایند لوی را می‌توان با استفاده از فرمول لوی-خینچن در هر لحظه‌ی t به صورت زیر نوشت:

$$E[e^{izX_t}]=\exp(-t\Psi(z)),$$

که در آن $\Psi(z)$ نمای مشخصه است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

* سخنران

$$\Psi(z) = i\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{izx} + izx 1_{\{|x|<1\}})\upsilon dx .$$

دراین رابطه $\mu \in \mathbb{R}$، $\sigma^2 \geq 0$ و υرا اندازه‌ی لوی گویند که بر روی خط حقیقی تعریف می‌شود و در خواص زیر صدق می کند:

$$\upsilon(\{0\}) = 0 \qquad , \qquad \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\upsilon dx < \infty .$$

متغیر تصادفی نمایی $\tau = \tau(q)$را که مستقل از فرایند لوی X است را با پارامتر q در نظر می‌گیریم. اگر کرنگین‌های فرایند لوی داده شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_q = \sup\{X_s : s \leq \tau(q)\} \qquad , \qquad N_q = \inf\{X_s : s \leq \tau(q)\}$$

آنگاه تابع مشخصه‌ی فرایند لوی X_τ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E[e^{izX_\tau}] = \frac{q}{q + \Psi(z)} .$$

حال برای قیمت‌گذاری یک اختیار معامله‌ی بامانع، کافی‌است اُمید ریاضی

$$E[f(x + X_t) 1_{\{x + M_t > b\}}]$$

را حل کنیم که در آن $b > 0$ و با انتخاب تابع f، می‌توان نوع اختیار بامانع را انتخاب کرد. برای مثال اگر $f(x) = (K - e^x)^+$ باشد، آنگاه اُمید ریاضی گفته شده، یک اختیار فروش بامانع از نوع بالا با ارزش می‌باشد.

برای اینکه بتوانیم روند گفته شده را انجام دهیم، نیاز است که توزیع توأم فرایند لوی و کرانگین‌های آن را به‌دست بیاوریم. از آنجایی که به‌دست آوردن توزیع گفته شده در بسیاری از موارد کاری بسیار سخت و حتی نشدنی است، لذا مجبور به استفاده از روش‌های عددی(شبیه‌سازی مونت‌کارلو[2]) هستیم. روش وینر-هوپف[1] یک تکنیک ریاضی است که در ریاضیات کاربردی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش در ابتدا برای حل دستگاه معادلات انتگرالی توسعه یافته است. اما کاربرد وسیع آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات دو بعدی است. نکته‌ای که می‌توان به عنوان نکته‌ی آغازین برای شروع کار در نظر گرفت این است که می‌توان معادلات وینر-هوپف را با استفاده از تبدیل فوریه و مساله ریمان-هیلبرت، باز نویسی کرد. اما استفاده از این روش و به‌طور کلی با یک مشکل عمده همراه

است و آن این است که معادلات وینر-هوپف در اکثر موارد سخت و غیر قابل حل هستند. لذا نیاز است تا راه حل بهتری برای حل این‌گونه مسایل یافت. روشی که در این مقاله معرفی می‌شود، از توابع قطعاً مثبت استفاده می‌کند که مترادف با توابع مشخصه است که هیچ کدام از مشکلات گفته شده را ندارد و یک تقریب نسبتاً دقیق را ارائه می‌کند.

۲. شبیه‌سازی مونت‌کارلو توزیع توام یک فرایند لوی و کرانگین‌های آن

فرض کنید $e_1, e_2, e_3, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی باشد که دارای میانگین یک هستند. آنگاه برای هر $t > 0$ و با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ می‌توان نوشت:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n} e_i\right) = t \qquad (1.2)$$

متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n} e_i$ یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای n و $\frac{n}{t}$ است که از این به بعد با نماد $g(n, n/t)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲,۱. برای هر $n \geq 0$ و $\lambda > 0$ و همچنین با توجه به تعریف $g := \sum_{i=i}^{n} e_i / \lambda$ خواهیم داشت:

$$(X_{g(n,\lambda)}, M_{g(n,\lambda)}) \stackrel{d}{=} (V(n, \lambda), J(n, \lambda)),$$

که در آن $V(n, \lambda)$ و $J(n, \lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(n, \lambda) = V(n-1, \lambda) + S_{\lambda}^{(n)} + I_{\lambda}^{(n)}$$

و

$$J(n, \lambda) = \max(J(n-1, \lambda), V(n-1, \lambda) + S_{\lambda}^{(n)})$$

و همچنین $V(0, \lambda) = J(0, \lambda) = 0$ و $S_{\lambda}^{(0)} = I_{\lambda}^{(0)} = 0$. از طرفی $\{S_{\lambda}^{(j)} : j \geq 1\}$ و $\{I_{\lambda}^{(j)} : j \geq 1\}$ دنباله‌های مستقل و هم‌توزیع هستند که به ترتیب دارای توزیع مشترک با $M_{\frac{e_1}{\lambda}}$ و $N_{\frac{e_1}{\lambda}}$ می‌باشند.

برهان: به [5] رجوع شود.

با توجه به رابطه (1.2) می‌توان گفت که دوتایی $(V(n, n/t), J(n, n/t))$ به دوتایی (X_t, M_t) همگراست. لذا برای به‌دست آوردن توزیع توام (X_t, M_t) کافی است یک دنباله‌ای مستقل و هم‌توزیع

از $S_{n/t} := S_{n/t}^{(1)}$ و $I_{n/t} := I_{n/t}^{(1)}$ را تولید کرد و با استفاده از قضیه (2.1) به توزیع گفته شده دست یافت.

حال فرض کنید تابع مناسب F داده شده باشد. آنگاه برای به‌دست آوردن اُمید ریاضی اثر این تابع بر روی دوتایی (X_t, M_t) باید از شبیه‌سازی مونت کارلو به شکل زیر استفاده کرد:

$$E[F(X_t, M_t)] \approx \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} F(V^{(m)}(n, n/t), J^{(m)}(n, n/t)).$$

که در این رابطه هر چقدر مقدار k بزرگ‌تر باشد، تخمین گفته شده دقیق‌تر است.

۳. پیاده‌سازی واجرا

آنچه تاکنون گفته شد، نحوه‌ی به‌دست آوردن توزیع توأم یک فرایند لوی و کرانگین‌های آن بود. اما این کار زمانی قابل انجام است که بتوان تابع چگالی احتمال کرانگین‌های فرایند مورد نظر را به‌دست آورد. در ادامه با استفاده توابع قطعاً مثبت، راه حلی برای این کار ارائه می‌شود اما پیش از آن لازم است چند تعریف آورده شود.

تعریف 3.1 تابع f را قطعاً مثبت می‌گویند اگر وتنها اگر تبدیل فوریه آن همه جا موجود و مقادیر آن غیر منفی باشد.

قضیه 3.1 اگر f_{M_q} و f_{N_q} به ترتیب توابع چگالی احتمال M_q و N_q(کرانگین‌های فرایند لوی X_τ باشد، آنگاه:

$$f_{M_q}(z) = \exp((iz+1)g^{+}(z) - \frac{c}{2}) \quad , \quad f_{N_q}(z) = \exp((iz+1)g^{-}(z) - \frac{c}{2})$$

که در آن

$$g^{+}(z) = \lim_{h\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nh)\frac{\exp \pi i(\frac{z}{h} - n) - 1}{2\pi i(\frac{z}{h} - n)},$$

و

$$g^{-}(z)=\lim_{h\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nh)\frac{1-\exp \pi i(\frac{z}{h}-n)}{2\pi i(\frac{z}{h}-n)}.$$

می‌باشد. همچنین تابع g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(z)=\frac{c+\ln(q)-\ln(q+\Psi(z))}{1+iz},$$

که در آن c یک مقدار ثابت است.

برهان: به [3] رجوع شود.

مرجع‌ها

1. Ho, Juwen. "The Wiener-Hopf Method and Its Applications in Fluids." (2007).
2. Korn, Ralf, Elke Korn, and Gerald Kroisandt. Monte Carlo methods and models in finance and insurance. CRC press, 2010.
3. Kucerovsky, Dan, Amir TP Najafabadi, and Aydin Sarraf. "On the Riemann-Hilbert factorization problem for positive definite functions." arXiv preprint arXiv:1506.00977 (2015).
4. Kuznetsov, Alexey. "Wiener–Hopf factorization and distribution of extrema for a family of Lévy processes." The Annals of Applied Probability 20.5 (2010): 1801-1830.
5. Kuznetsov, Alexey, et al. "A Wiener-Hopf monte carlo simulation technique for Lévy processes." The Annals of Applied