بررسی روش‌های قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی به کمک سبدی از اختیارهای خرید اروپایی در مدل‌های پرش-پخش

علی فروش باستانی[۱]، سحر یعقوبی هرزندی[۲*]

[۱] دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان، دانشکده علوم ریاضی،
bastani@iasbs.ac.ir

[۲] دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان، دانشکده علوم ریاضی،
saharyagoby@gmail.com

چکیده: مشتقات یکی از مهم‌ترین ابزارهای مالی هستند که برای کنترل ریسک در بازارهای مالی به‌کار می‌روند. ارزش مشتقات وابسته به یک دارایی ریسکی بوده و قیمت‌گذاری آنها یکی از مهم‌ترین مسائل در ریاضیات مالی است. اختیارات آمریکایی و اروپایی دو نوع معروف از مشتقات هستند. با توجه به این‌که اختیارات آمریکایی نسبت به اختیارات اروپایی آزادی عمل بیشتری دارند، در نتیجه قیمت‌گذاری آن‌ها نیز پیچیده‌تر است. در این مقاله روشی را معرفی می‌نماییم که با تبدیل قیمت‌گذاری مشتقه آمریکایی به سبدی از اختیارهای خرید اروپایی، تا حدودی پیچیدگی‌های قیمت‌گذاری مشتقه آمریکایی را کاهش می‌دهد. سپس، این روش را برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی دارایی‌هایی تحت فرآیندهای مختلف مانند حرکت براونی هندسی، مدل پرش-پخش مرتون و مدل پرش-پخش کو بکار می‌بریم. همچنین، با به‌کارگیری تبدیل فوریه‌ی سریع در محاسبات مربوط به مدل پرش-پخش کو، زمان انجام محاسبات را کاهش داده و در نهایت، این روش را با روش مونت کارلو-کمترین مربعات مقایسه می‌نماییم.

کلمات کلیدی: قیمت‌گذاری اختیارات، اختیار آمریکایی، مدل پرش-پخش، تبدیل فوریه سریع، تبدیل لاپلاس.
طبقه بندی موضوعی: 91g20, 91g60, 65t50

۱ مقدمه

ابزارهای مشتقه نقش بسیار مهمی در بازارهای مالی ایفا می‌کنند. این ابزارها روی سهام، نفت خام، نرخ بهره و به طور کلی هر متغیر اقتصادی دیگر بسته می‌شوند. اختیارات از جمله مهم‌ترین ابزارهای مشتقه هستند که دو نوع معروف آن‌ها عبارتند از اختیارات آمریکایی و اروپایی.

قیمت‌گذاری مشتقات آمریکایی، یکی از چالش برانگیزترین مسائل در مشتقات مالی است. ما مشتقات آمریکایی را به‌صورت قراردادهایی با شماری متناهی از فرصت‌های اجرای آنی، تا زمان انقضا تعریف می‌کنیم. به این مشتقات برمودایی گفته می‌شود. مشکل اصلی در قیمت‌گذاری چنین مشتقاتی، تعیین

* سخنران

سیاست‌های بهینه اجرای آنی است. در مقابل، قیمت‌گذاری مشتقات اروپایی و به‌خصوص اختیارات اروپایی مشکلات کمتری دارند.

اختیارات خرید و فروش اروپایی می‌توانند تحت فرآیندهای مختلفی قیمت‌گذاری شوند. به طور کلی می‌توان قیمت این اختیارات را با استفاده از روش‌های عددی مانند شبیه‌سازی عددی تعیین کرد.

در سال ۲۰۰۶، لاپریس و همکارانش در [۳] روشی را برای قیمت‌گذاری مشتقات آمریکایی ارائه دادند، طبق این روش با استفاده از درونیابی قاطع و مماس می‌توان قیمت یک مشتقه آمریکایی را به قیمت چند اختیار خرید اروپایی تجزیه کرد. در این مقاله ارزش اختیارات خرید و فروش آمریکایی تحت حرکت براونی هندسی و مدل پرش-پخش مرتون، با استفاده از این روش محاسبه می‌شود. همچنین، ما این روش را برای محاسبه ارزش اختیار آمریکایی تحت مدل پرش-پخش به‌کار می‌بریم. برای محاسبه ارزش اختیار آمریکایی با استفاده از درونیاب قاطع و مماس، به محاسبه ارزش اختیار خرید اروپایی نیاز داریم. با توجه به این‌که محاسبه ارزش این اختیار با استفاده از فرمول تحلیلی کو بسیار بسیار زمان‌بر است، از تبدیل فوریه سریع استفاده می‌نماییم. همچنین، در محاسبات مربوط به درونیاب مماس، مشتق اختیار خرید اروپایی نیاز است، این مشتق را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس محاسبه می‌کنیم.

۲ قیمت‌گذاری مشتقات آمریکایی با استفاده از اختیارهای خرید اروپایی

در قضای زیر V ارزش اختیار امریکایی، V^E ارزش اختیار اروپایی، S قیمت دارایی پایه، N تعداد فرصت های اجرا برای اختیار آمریکایی، x_i ها نقاط درونیاب، n تعداد نقاط درونیاب، y محل تقاطع دو خط مماس مجاور، τ فاصله بین نقاط درونیاب، r نرخ بهره، δ نرخ سود تقسیمی و m شیب خط قاطع هستند.

قضیه ۲,۱. **(الگوریتم قاطع برای اختیار فروش آمریکایی)**

فرض کنید $i = 0,\ldots,N-1$. اگر برای $j = i+1,\ldots,N-1$ داشته باشیم $x_1^{(j)} = \tilde{s}_j^*$، $m_1^{(j)} = -1$، $x_n^{(j)} > K$ و $m_{n+1}^{(j)} = 0$، آن‌گاه یک مقدار متناهی $\tilde{s}_i^* < K$ وجود دارد به طوری که برای $S < (\geq)\tilde{s}_i^*$ نامساوی $\tilde{H}_i(S) < (\geq) L(S)$ برقرار است. در نتیجه تقریب تابع ارزش برابر است با

$$\tilde{V}_i(S)=\begin{cases} L(S)=K-S, & S<\tilde{s}_i^*, \\ \tilde{H}_i(S), & S\geq \tilde{s}_i^*, \end{cases}$$

که در آن برای $i<N-1$ تابع $\tilde{H}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\tilde{H}_i(S)=Ke^{-r\tau}-Se^{-\delta\tau}+\sum_{p=1}^{n}(m_{p+1}^{(i+1)}-m_p^{(i+1)})V^E(S,x_p^{(i+1)},\tau),$$

به‌علاوه، نامساوی‌های $\tilde{H}_i\geq H_i$ و $\tilde{V}_i\geq V_i$ نیز برقرارند. با توجه به این قضیه $\tilde{V}_i$ یک کران بالا برای قیمت اختیار واقعی است.

قضیه۲.۲. (الگوریتم مماس برای اختیار فروش آمریکایی)

فرض کنید $i=0,\ldots,N-1$. اگر برای $j=i+1,\ldots,N-1$ داشته باشیم $x_1^{(j)}=\tilde{s}_j^*$، $y_i^{(j)}=x_1^{(j)}$، $m_0^{(j)}=-1$، $m_1^{(j)}=\partial\tilde{H}_j(S)/\partial S\big|_{S=x_1^{(j)}}$ و $m_{n+1}^{(j)}=m_n^{(j)}$، آن‌گاه

یک مقدار متناهی $\tilde{s}_i^*<K$ وجود دارد به طوری که برای $S<(\geq)\tilde{s}_i^*$ نامساوی $\tilde{H}_i(S)<(\geq)L(S)$ برقرار است. در نتیجه تقریب تابع ارزش برابر است با:

$$\tilde{V}_i(S)=\begin{cases} L(S)=K-S, & S<\tilde{s}_i^*, \\ \tilde{H}_i(S), & S\geq \tilde{s}_i^*, \end{cases}$$

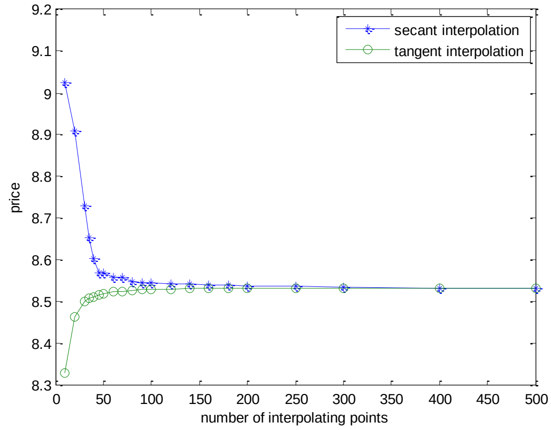
که در آن برای $i<N-1$ تابع $\tilde{H}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\tilde{H}_i(S)=Ke^{-r\tau}-Se^{-\delta\tau}+\sum_{p=-1}^{n+1}(m_{p+1}^{(i+1)}-m_p^{(i+1)})V^E(S,y_p^{(i+1)},\tau),$$

بعلاوه، نامساوی‌های $\tilde{H}_i\leq H_i$ و $\tilde{V}_i\leq V_i$ نیز برقرارند. با توجه به این قضیه $\tilde{V}_i$ یک کران پایین برای قیمت اختیار واقعی است.

۳ نتایج اساسی

شکل زیر نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم قاطع و مماس برای یک اختیار فروش سه ساله تحت حرکت براونی هندسی است. این اختیار هر شش ماه یک بار با قیمت توافقی $K=100$ و پارامترهای $\sigma=0.2$، $r=0.05$ و $\delta=0.04$ قابل اجرا است.



شکل۱. همگرایی مرزهای اختیار فروش آمریکایی($S_0 = 100$)

جدول ۱ و ۲ نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم قاطع و مماس برای یک اختیار فروش شش ماهه به‌ترتیب تحت مدل پرش-پخش مرتون و مدل پرش-پخش کو است. همچنین قیمت این اختیارات با استفاده از روش مونت کارلو کمترین مربعات (LSM) نیز محاسبه شده است. برای جزئیات بیشتر به [۱] و [۲] و [۴] و [۵] مراجعه کنید.

جدول۱: قیمت اختیار فروش برمودایی تحت فرآیند پرش-پخش مرتون

	N=2		N=3	
نام الگوریتم	قیمت اختیار	زمان اجرا	قیمت اختیار	زمان اجرا
مماس	8/566	38/50	8/654	53/26
قاطع	8/569	32/88	8/657	51/86
کمترین مربعات	8/551	39/62	8/975	55/06
	N=4		N=6	
نام الگوریتم	قیمت اختیار	زمان اجرا	قیمت اختیار	زمان اجرا
مماس	8/699	67/99	8/835	95/60
قاطع	8/709	65/12	8/839	90/50
کمترین مربعات	8/697	69/78	8/830	99/06

جدول۲: قیمت اختیار فروش برمودایی تحت فرآیند پرش-پخش کو

	N=2		N=3	
نام الگوریتم	قیمت اختیار	زمان اجرا	قیمت اختیار	زمان اجرا
مماس	4/787	2/280	4/817	10/800
قاطع	4/793	1/880	4/818	4/400
کمترین مربعات	4/791	40/990	4/810	56/420
	N=4		N=6	
نام الگوریتم	قیمت اختیار	زمان اجرا	قیمت اختیار	زمان اجرا
مماس	4/833	16/700	4/865	50/910
قاطع	4/838	9/730	4/870	28/580
کمترین مربعات	4/831	71/540	4/863	101/150

مرجع‌ها

1. S. G. Kou, A jump diffusion model for option pricing, Management Science, 48(2002), 1086-1101.
2. S. Kou, G. Petrella and H. Wang, Pricing path-dependent options with jump risk via Laplace transforms, 74(2005), 1-23.
3. S. B. Laprise, M. C. Fu, S. I. Marcus, A. E. Lim and H. Zhang, Pricing American-style derivatives with European call options, Management Science, 52(2006), 95-110.
4. F. A. Longstaff and E. S. Schowartz, Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach, Review of Financial Studies, 14(2001), 113-147.
5. R. C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of Financial Economics, 3(1976), 125-144.