بررسی عددی تطبیق پارامترهای مدل هستون

ساناز موسوی[1*] Mousavi.Sanaz@stu.um.ac.ir
علیرضا سهیلی [2] Soheili@um.ac.ir

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد آنالیز عددی دانشگاه فردوسی مشهد

[2] استاد گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: امروزه در ریاضیات مالی، مدل‌های تلاطم به همراه نرخ بهره تصادفی به دلیل نزدیک بودن به مدل‌های واقعی در بازارهای مالی مورد توجه هستند، که ازجمله مهم‌ترین آن‌ها مدل هستون است. بدون توجه به اینکه چه مدلی برای تخمین قیمت انتخاب می‌کنیم، تطبیق (کالیبراسیون) پارامترهای مدل و بازار یک مسئله است. تئوری نحوه تطبیق پارامترها را بیان کرده و پارامترهای مدل هستون را با داده‌های بازار S&P500 مطابقت می‌دهیم. سپس با استفاده از پارامترهای به‌دست‌آمده از تطبیق به‌عنوان نقطه شروع، اوراق اختیار معامله اروپایی و آسیایی را، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، قیمت‌گذاری می‌کنیم. همچنین اثر بخشی روش مونت کارلو در مدل هستون برای قیمت‌گذاری یک اختیار خرید اروپایی را با جواب به دست آمده از فرم بسته مقایسه می‌کنیم. برای اختیار نامتعارف آسیایی، قیمت‌های به دست آمده، همگرایی خوبی دارند. با این حال؛ نتایج نه چندان خوب در قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی با مونت کارلو، موجب تردید در استفاده از این روش برای اختیار آسیایی می‌شود.

کلمات کلیدی: مدل هستون، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، اختیار معامله اروپایی، اختیار معامله آسیایی، کالیبراسیون.
طبقه‌بندی موضوعی: G13, C51, C52, C61, C63

مقدمه:در این مقاله قیمت‌گذاری اختیارات را با مدل هستون، بررسی خواهد شد. بحث‌هایی در مورد معنای تطبیق یک مدل با دنیای واقعی آورده شده است. مدل هستون با داده‌های واقعی بازار تطبیق داده‌شده، سپس با استفاده از این پارامترها، اختیارات اروپایی و آسیایی با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، قیمت‌گذاری شده‌اند.

تطبیق مدل

بدون توجه به مدلی که برای استفاده انتخاب می‌کنیم، تطبیق پارامترهای مدل با داده‌های بازار، یک مسئله است. فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ مجموعه پارامترهای مدل دلخواه باشد. روش تطبیقی، معمولاً دو صورت دارد.

---

[*] سخنران

اولین و شاید جذاب‌ترین رویکرد، تطبیق فرایندهای تصادفی استفاده‌شده در مدل‌ها در مقابل داده‌های سری زمانی مشاهده شده است. برای مدل هستون، برای مثال، به معنی به دست آوردن اطلاعات قیمت سهام با استفاده از برخی از ابزارهای استنباط آماری مناسب این داده‌ها، به مدل است. این شیوه از [1] گرفته‌شده است، کسانی که یک روش حداکثری احتمالاتی را برای برآورد پارامترها استفاده کردند. [3] از یک روش لحظه‌ای برای تخمین پارامترها استفاده کردند. روش دوم که بیش از همه در عمل مورداستفاده قرار می‌گیرد و در این مقاله نیز استفاده‌شده است، کالیبره کردن مدل، به‌طوری است که قیمت مدل اختیار، p^{model}، بر قیمت بازار، p^{market}، منطبق باشد؛ یعنی، α را طوری بیابیم که $p^{model}(.;\alpha)=p^{market}$. همچنین، می‌توان مدل را برای اختیارات استاندارد کالیبره کرد و سپس پارامترها را برای ارزش‌گذاری اختیارات نامتعارف استفاده نمود. ازآنجاکه ما با قیمت بازار اختیارات کار می‌کنیم، مستقیماً تحت اندازه Q هستیم و مسئله کمیتی، برای قیمت بازار از ریسک تلاطم از بین می‌رود. این رویکرد را به لحاظ ریاضیاتی می‌توان به شکل ذیل فرمول‌بندی کرد:

$$\min_{\alpha}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\left(p^{model}\left(S,T_i,K_i,\alpha\right)-p_i^{market}\right)^2$$

که S قیمت جاری سهام، T زمان سررسید، K قیمت توافقی و N تعداد قیمت‌های مورداستفاده از بازار است. ثابت‌های $\omega_i, i=1,\dots,N$ وزن‌های اختصاص داده‌شده به هر اختیار است. وزن‌ها اجازه می‌دهند تابعی از شکاف قیمت، بین عرضه و تقاضا برای افزایش قیمت داشته باشیم، ازاین‌رو وزن بیشتر به اختیاراتی با شکاف کوچک‌تر تعلق می‌گیرد، و برعکس، وزن کمتر به اختیاراتی با شکاف قیمتی بیشتر تعلق دارد. برای این پیشنهاد، برای مثال می‌توانیم انتخاب کنیم

$$\omega_i=\frac{K}{p_i^{ask}-p_i^{bid}}$$

که K کوچک‌ترین شکاف قیمت عرضه و تقاضا است.

ازآنجاکه یک تناظر یک‌به‌یک بین قیمت اختیار و تلاطم ضمنی برقرار است، خواهیم داشت:

$$\min_{\alpha}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\left(\sigma_I^{model}\left(S;T_i,K_i,\alpha\right)-\sigma_I^{market}\right)^2 \qquad (۱)$$

σ_I، تلاطم ضمنی را تعریف می‌کند.

نتایج اساسی کالیبراسیون مدل

وقتی مدل هستون را با داده‌های بازار تطبیق می‌دهیم، با مسئله بهینه‌سازی ذیل مواجه هستیم:

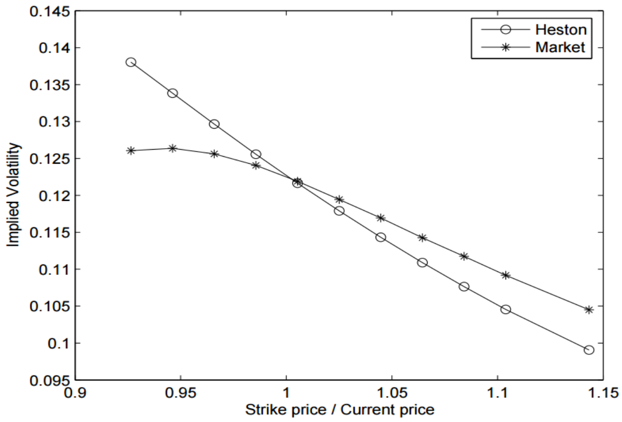
$$\min_{\alpha}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_I^{model}\left(x,\tau_i,K_i;\alpha\right)-\sigma_I^{market}\right)^2 \qquad (۲)$$

که $\alpha=\left(V_0,\theta,\kappa,\eta,\rho\right)$ و σ_I تلاطم ضمنی را، تعریف می‌کند. برای کالیبراسیون مدل، شاخص S&P500، عمدتاً به دلیل این واقعیت که یک بازار بسیار پویا برای اختیارات روی شاخص دارد، برگزیده شده است. از قیمت بسته‌شده در تاریخ ۲۹ سپتامبر ۲۰۰۵، میانگین قیمت عرضه و تقاضا، استفاده‌شده است. اختیارات با شکاف عرضه و تقاضای بیش‌ازحد، که عمدتاً شامل اختیارات بسیار سودده یا بسیار زیان‌ده می‌شوند، نادیده گرفته‌شده‌اند. این رویکرد معادل این است که در معادله (۱)، ω_i را صفر یا معادل شکاف قیمت عرضه و تقاضا قرار گیرد. کالیبراسیون فقط برای سررسیدهای خاص حدود یک سال انجام شده است، یعنی، $\tau_i=\tau_j\approx 1$ برای $i,j=1,\dots,N$.

مسئله مینیمم‌سازی (۲)، به‌هیچ‌وجه یک مسئله ساده نیست و جواب نسبت به نقطه شروع بهینه‌سازی a_0 بسیار حساس است. با ثابت نگه‌داشتن همه پارامترها و تغییر آن‌ها به‌نوبت و ارزیابی دستی جواب بهینه تولیدشده توسط تمام بهینه‌سازی‌ها، مجموعه پارامترهای ذیل بهترین برازش $\hat{\alpha} = (\upsilon_0, \theta, \kappa, \eta, \rho)$ را به ما می‌دهد:

$\upsilon_0 = 0.0082$ و $\theta = 0.0168$ و $\kappa = 6.21$ و $\eta = 0.625$ و $\rho = -0.6674$

این پارامترها به‌خوبی با پارامترهای به‌دست‌آمده در [4] همخوانی دارد. در شکل۱ نوسانات ضمنی اختیار خرید از قیمت بسته‌شده در ۲۵ نوامبر ۲۰۰۵ همراه با نوسانات ضمنی پیشنهادشده توسط مدل هستون، رسم شده است. مشاهده می‌شود که تلاطم ضمنی بازار بسیار به مدل تلاطم ضمنی پیشنهادشده در مدل، برای اختیارات سودده، نزدیک است. همچنین مشاهده می‌کنید که فاصله با حرکت به سمت سودده شدن، و به‌طور مشابه زیان‌ده شدن، بیشتر می‌شود.



شکل۱: نوسانات ضمنی S&P500 و مدل نوسانات تصادفی در ۲۵ نوامبر ۲۰۰۵

اختیار خرید اروپایی-قیمت‌گذاری

برای ارزیابی اثربخشی قیمت‌گذاری مونت‌کارلو تحت تلاطم تصادفی، می‌توانیم قیمت تولیدشده توسط فرم بسته [1] را با قیمت به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مقایسه کنیم. شبیه‌سازی S_t و V_t با روش اویلر-ماریاما با طول گام $\Delta_t = \frac{1}{2^{15}}$ انجام شده است. پارامترهای استفاده‌شده برای فرایند واریانس V_t، $\hat{\alpha} = (\upsilon_0, \theta, \kappa, \eta, \rho) = (0.0082, 0.0168, 6.21, 0.625, -0.6674)$ است و قیمت فعلی سهام $S_0 = 100$، و قیمت توافقی $K = 100$، نرخ بهره $r = 4\%$ و زمان سررسید $T = 1$ سال است. با جایگذاری این ارقام در فرم بسته عدد $C_{CF} = 6.9990$ برای بازدهی قیمت به‌دست‌آمده است. جدول۱ قیمت تولیدشده توسط تابع قیمت‌گذاری برای مسیرهای نمونه‌ای متفاوت را همراه با درصد انحراف از قیمت C_{CF} نشان می‌دهد. می‌بینیم که تفاوت میان جواب فرم بسته و مونت‌کارلو زیاد است. توجه کنید که تمام قیمت‌های به‌دست‌آمده با مونت‌کارلو از قیمت فرم بسته کوچک‌تر هستند، همچنین به نظر نمی‌رسد این تفاوت با افزایش تعداد دفعات شبیه‌سازی، کاهش یابد. نتایج بالا، تردید در استفاده

از روش مونت‌کارلو را با توجه به اینکه نتایج قیمت اختیار مدام بدتر می‌شود، افزایش می‌دهد. [2] نتایج مشابهی به دست آورده‌اند.

N	MC Price	Difference (%)
1000	6.7290	-3.859
10000	6.9073	-1.311
20000	6.8821	-1.671
40000	6.8896	-1.564
80000	6.9303	-0.982
120000	6.8900	-1.558

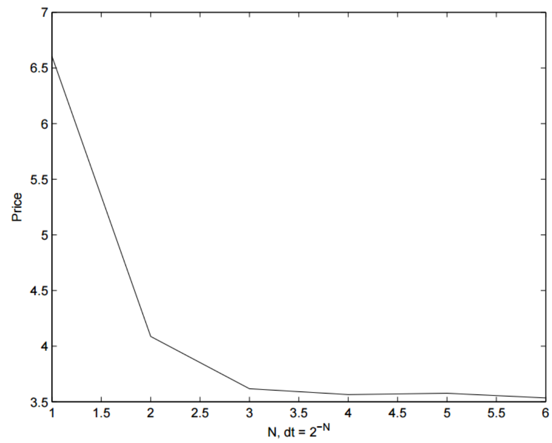
جدول۱: قیمت اختیار خرید با استفاده از مونت‌کارلو. در اینجا $C_{CF} = 6.9990$

اختیار معامله آسیایی

در این بخش نتایج قیمت‌گذاری روی اختیار خرید آسیایی را دنبال می‌کنیم. اختیارات آسیایی اختیاراتی هستند که بازده آن‌ها بر اساس متوسط قیمت دارایی پایه طی دوره زمانی مشخص تعیین می‌شود، و معادل $V(t) = (\frac{1}{t-a}\int_a^t S(s)ds - K)^+$ است که a زمان شروع میانگین‌گیری را نشان می‌دهد. $a = 0$ فرض شده تا میانگین روی کل طول عمر اختیار گرفته شود.

قیمت‌گذاری

استفاده از روش مونت‌کارلو برای این نوع اختیارات ساده و نتایج قیمت‌گذاری امیدوارکننده است.



شکل۲: محاسبه همگرایی قیمت اختیار خرید آسیایی

نتیجه‌گیری

هنگامی‌که صحبت از قیمت‌گذاری مشتقات مالی به میان می‌آید، روش مونت‌کارلو در دسترس‌ترین روش است، اما بدون نقص نیست. چون در هنگام گسسته سازی، جواب تقریبی تلاطم SDE در زمان به سمت منفی شدن متمایل می‌شود و این امر ازآنجاکه موجب پیچیده شدن تلاطم دارایی پایه می‌گردد، مدل را شکست‌پذیر می‌کند. از طرفی، آشکار است که به

مسیری با وضوح بسیار بالا برای درستی قیمت‌گذاری اختیارات نیاز داریم. این موجب می‌شود خواستار روش‌های محاسباتی باشیم. همچنین ما نمی‌توانیم قیمت اختیارات آسیایی را با قیمت تحلیلی مقایسه کنیم، بلکه فقط می‌توانیم استنباط کنیم که همگرایی روش مونت‌کارلو به قیمت ثابت به‌وضوح افزایش یافته است.

مرجع‌ها

1. S. Heston, 'A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options', The Review of Financial Studies 6, 327-343, 1993
2. D. Bates, 'Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options', The Review of Financial Studies 9, 69-107, 1996
3. M. Chesney, L. Scott, 'Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model' The Journal of Financial and Quantitative Analysis 24, 267-284, 1989
4. D. Duffie, K. Singelton, K. J. Pan, 'Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions', Econometrica 68, 1343-1376, 2000
5. R. Kjellin, G. Lovgren, Option pricing under stochastic volatility :A numerical investigation of the Heston model, Institutionen för nationalekonomi med statistic, 2006.