روش‌های استوار آماری در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری

علی آقامحمدی [۱]، اسماعیل چوگلی [۲*]

[۱] گروه آمار، دانشگاه زنجان

[۲] گروه ریاضیات مالی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

چکیده: روش‌های استوار آماری با ارایه رویکردی جهت برآوردهای استوار برای ماتریس واریانس-کواریانس بازده دارایی‌ها، که تنها پارامتر مورد نیاز جهت تشکیل سبدهای کمترین-واریانس و عامل ایجاد خطای برآورد در این سبدها نیز هستند، در نظریه انتخاب سبد مورد بحث قرار می‌گیرند. هدف این روش‌ها کاهش حساسیت وزن سبد نسبت به انحرافات توزیع بازده دارایی‌ها از توزیع واقعی آنها است. برآوردگرها در این روش‌ها با در نظرگرفتن این حقیقت که توزیع بازده دارایی‌ها همواره از توزیع واقعی انحراف دارد، اطلاعات مفیدی نه تنها برای توزیع واقعی بلکه برای توزیع‌های همسایه نیز ارایه می‌دهند. در واقع این روش‌ها با ارایه یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی منفرد که متغیرهای تصمیم آن وزن‌های سبد و تابع هدف آن برآوردهای استوار هستند، شروع می‌شود. در این مقاله با فرض حالت‌های متفاوت انحراف بازده دارایی‌ها از توزیع واقعی، از انواع توزیع‌های نرمال آمیخته جهت شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم و عملکرد و همواری وزن سبدهای استوار در این روش‌ها را با سبدهای معمول مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: انتخاب سبد، مدل کمترین-واریانس، استوار آماری، خطای برآورد

طبقه بندی موضوعی: 91G70, 91G10

۱ مقدمه

فرض کنید n دارایی $S_1, \dots, S_n$ ، (n>1) در بازار برای سرمایه‌گذاری وجود دارد. یک سرمایه‌گذار می‌تواند کلیه ثروت خود برای سرمایه‌گذاری را به این دارایی‌ها اختصاص دهد. اگر نسبت ثروتی که او در دارایی S_i سرمایه‌گذاری می کند را با w_i نشان دهیم، آنگاه $w=(w_1,\dots,w_n)$ وزن هریک از دارایی‌ها در سبد را نشان می‌دهد. اگر بردار $R=(R_1,\dots,R_n)$ نشان دهنده‌ی بازده این دارایی‌ها در دوره آتی باشد، آنگاه بازده مورد انتظار و واریانس سبد به صورت

$$E(w'R) = w_1\mu_1 + \cdots + w_n\mu_n = w'\mu \,,$$
$$Var(w'R) = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j = w'\Sigma w$$

خواهد بود که در آن $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ بردار بازده‌های مورد انتظار و $\Sigma=(\sigma_{ij})$ که در آن $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$، نشان دهنده‌ی ماتریس واریانس-کواریانس بردار R است (جونز، ۱۳۸۸).

۲ انتخاب سبد

اولین مدل برای مسأله انتخاب سبد بهینه برمبنای رابطه ریسک و بازده توسط مارکوئیتز ارائه شد که به مدل میانگین-واریانس معروف است. ایده اصلی نظریه مدرن سبد انتخاب ترکیبی از دارایی‌های ناهمبسته جهت سرمایه‌گذاری است، به

---

[*] سخنران

طوری که دارایی‌ها ریسک یکدیگر را خنثی کرده و یک بازده ثابت با ریسک کمتر بدست آید. فرض کنید N دارایی ریسکی مفروض باشد، سبد به روش میانگین-واریانس جواب مسأله بهینه‌سازی زیر است:

$$\min_{w} \quad w^T\hat{\sum}w - \frac{1}{\gamma}\hat{\mu}^T w$$
$$s.t. \qquad w^T e = 1$$

که در آن $w \in R^N$ بردار وزن‌های سبد، $\hat{\mu}^T w$ میانگین نمونه‌ای بازده‌های سبد، $w^T\hat{\sum}w$ واریانس نمونه‌ای بازده‌های سبد و γ پارامتر ریسک‌گریزی است (مارکوئیتز، ۱۹۵۲) .

سبدهای به روش میانگین-واریانس با برآورد μ و $\sum$ از روی داده‌های تاریخی و با تکیه بر این اصل که رابطه‌ای که در گذشته بین بازده‌ها وجود داشته در آینده نیز تا حدودی وجود خواهد داشت، بدست می‌آیند؛ اما این روش تشکیل سبد، مشکلات اساسی دارند که از جمله آن می‌توان به حساسیت وزن‌های بهینه بدست آمده از این روش نسبت به خطاهای برآورد پارامترهای ورودی اشاره کرد؛ بطوری که کوچکترین خطا در برآورد این پارامترها تاثیر زیادی بر وزن‌های آنها دارد. لذا در این مقاله با حذف عامل بزرگتر ایجاد خطای برآورد یعنی میانگین بازده مورد انتظار، نظر خود را به سبدهای کمترین-واریانس معطوف خواهیم کرد. سبد کمترین- وتریانس سبد یکتای بهینه‌ای بر روی مرز کارا می‌باشد که کمترین میزان ریسک را داشته و از برآورد ماتریس واریانس-کواریانس بازده دارایی‌ها بدست می‌آید. این سبد در قیاس با سبدهای میانگین- واریانس نسبت به انحرافات توزیع بازده دارایی‌ها از توزیع نرمال مفروض حساسیت کمتری از خود نشان می‌دهد. سبد کمترین- واریانس در واقع سبد میانگین-واریانسی با پارامتر ریسک‌گریزی بی‌نهایت $(\gamma = \infty)$ است و بنابراین وزن‌های بهینه این سبد را می‌توان با حل مسأله بهینه‌سازی زیر بدست آورد.:

$$\min_{w} \; w^T\hat{\sum}w$$
$$s.t. \quad w^T e = 1.$$

برآوردگرهای ماتریس واریانس-کواریانس برای بازده‌های بصورت نرمال توزیع یافته همان برآوردگرهای حداکثر درستنمایی (MLE) هستند. اما با وجود ویژگی‌های خوبی که این برآوردگرها برای بازده‌های بصورت نرمال توزیع یافته دارند ولی نسبت به انحرافات توزیع بازده دارایی‌ها از توزیع (نرمال) مفروض حساسیت زیادی از خود نشان می‌دهند (چونز، ۱۳۸۸) .

لذا در این مقاله هدف ارائه رویکردی است که در آن از برآوردگرهای استوار برای برآورد پارامترهای نامعلوم در تشکیل سبد استفاده خواهیم کرد. از این رو، گروهی دیگر از سبد به روش کمترین-واریانس که با استفاده از برآوردگرهای استوار S و M بدست می‌آیند، ارایه خواهد شد.

۱٫۲ سبدهای استوار

برآوردگرهای استوار در واقع، برآوردگرهایی هستند که اطلاعات مفیدی درباره بازده دارایی‌ها حتی زمانی که توزیع حقیقی بازده‌ها از توزیع نرمال که معمولا در تشکیل سبد به روش میانگین-واریانس از فرض‌های اساسی است، انحراف داشته باشد ارایه می‌کنند. به طور خاص این برآوردگرها نه تنها برای توزیع مفروض بلکه برای هر توزیع دیگر در همسایگی آن نیز ویژگی‌های خوبی ارائه می‌دهد.

سبد M :

اولین رده از سبدهایی استوار که در این جا ارائه می‌کنیم با استفاده از برآوردگر استوار M بدست می‌آیند. وزن‌های بهینه سبد M در این روش از حل مسئله بهینه‌سازی زیر بدست می آیند

$$\min_{w,m} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \rho(w^T r_t - m)$$
$$s.t. \qquad w^T e = 1$$

که در آن تابع زیان ρ تابعی محدب و متقارن با مینیمم یکتا در صفر ، r_t بازده دارایی در زمـان t و بـالاخره m متوسـط مقدار انتظار بازده سبد در دوره آتی تحت برآوردگر M است. توجه شود که حالت‌های خـاص از برآوردگرهـای M، همـان میانگین و واریانس نمونه‌ای است که با درنظرگرفتن $\rho(r) = 0.5r^2$ بدست می‌آیند. سبدهای M را بعنوان رویکـردی که در آن برآوردگر M ریسک سبد را مینیمم می‌کند، تعریف می‌کنیم. از این رو، متغیر تصمیم این مسـأله بهینـه‌سـازی همان وزن سبد و تابع هدف آن برآوردگر M از ریسک سبد می‌باشد.

سبد S :

دومین گروه از سبدهای استوار مبتنی بر برآوردگرهای استوار S هستند که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم. برای سـبد مفروض w، برآوردگر S از ریسک و بازده سبد بصورت مقادیری مانند s و m است که از حل مسأله بهینه‌سازی زیر بدست می‌آیند:

$$\min_{m,s} \quad s$$
$$s.t. \;\; \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \rho(\frac{w^T r_t - m}{s}) = K$$

که در آن ρ تابع زیان و $K = E(\rho(z))$ است که z متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. توجه کنیم که تابع زیان ρ باید دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱-متقارن باشد و مینیمم یکتا در صفر داشته باشد،

۲-باید عدد $c > 0$ موجود باشد به قسمی که تابع زیان در بازه $[0, c]$ اکیدا صعودی و در $[c, \infty)$ ثابت باشد، به عبارت دیگر ρ باید کراندار باشد.

سبد استوار S را بعنوان روشی که در آن، برآوردگر S از ریسک سبد مینیمم می‌شود، تعریف می‌کنیم. یعنی سبد مورد نظر از حل مسئله بهینه سازی زیر بدست می‌آید:

$$\min_{m,s} \quad s$$
$$s.t. \;\; \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \rho\left(\frac{w^T r_t - m}{s}\right) = K$$
$$s.t. \qquad w^T e = 1$$

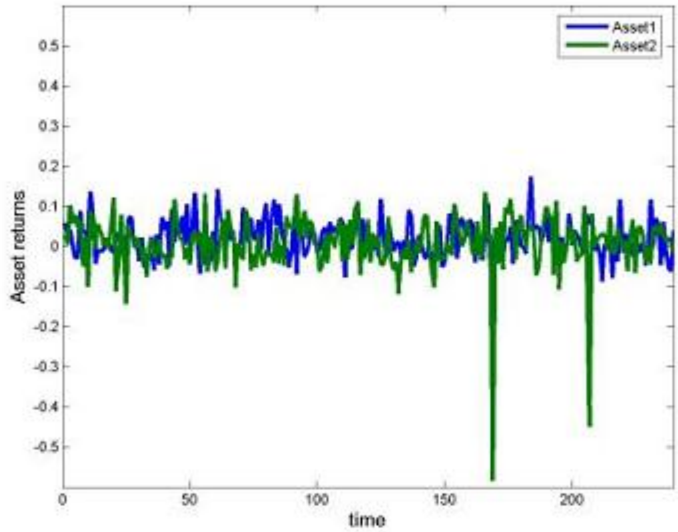
توجه کنیم که در این مسئله بهینه سازی، تابع هدف همان برآوردگر S ازریسک سبد و متغیـر تصـمیم آن w وزن سـبد می‌باشد (میگول و نوگالس، ۲۰۰۹) . در ادامه با یک شبیه سازی کارایی سبدهای عنوان شده بررسی می‌شوند.

۲ مطالعه شبیه سازی

دو دارایی ریسکی را در نظر بگیرید که توزیع بازده های آنها در اکثر اوقات از توزیع مفورض نرمال پیروی کند، اما اندازه احتمال کوچکی نیز وجود دارد که بازده‌های دو دارایی ریسکی از یک توزیع انحرافی که متفاوت از توزیع مفروض است، مشاهده شوند. فرض می‌کنیم توزیع بازده دارایی حقیقی بصورت زیر باشد:

$$G = \%99 \times N(\mu, \Sigma) + \%1 \times D$$

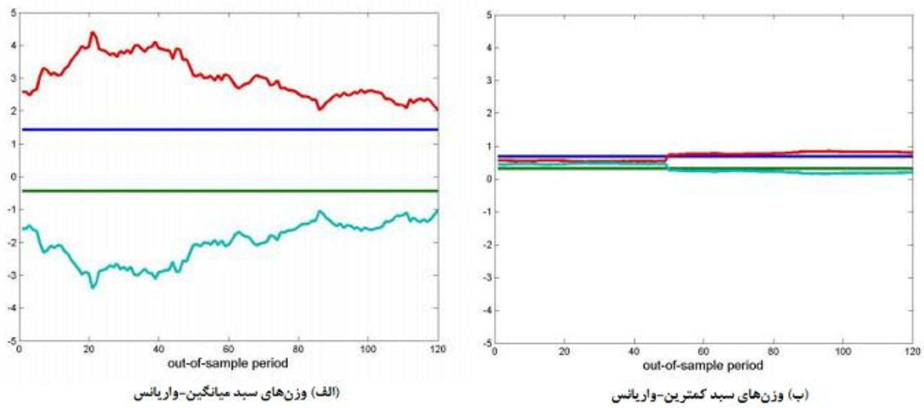
که در آن، $N(\mu, \Sigma)$ توزیعی نرمال با میانگین μ و ماتریس واریانس-کواریانس Σ (همان توزیع مفروض) و D توزیع انحرافی باشد. در واقع فرض می‌کنیم که ۹۹ درصد احتمال وجود دارد که بازده‌های دو دارایی ریسکی بطور مستقل و یکسان تحت یک توزیع نرمال با میانگین سالیانه ۱۲ درصد و انحراف معیار ۱۶ درصد توزیع یابند و یک درصد احتمال دارد که بازده‌های این دو دارایی طبق یک توزیع نرمال با همان انحراف معیار، ولی با میانگین بازدهی که برای دارایی دوم ۵۰- برابر میانگین بازده دارایی اول است، توزیع یابد. حال با تولید نمونه از توزیع حقیقی بازده دارایی های G، یک سری زمانی متشکل از ۲۴۰ بازده دارایی تشکیل می‌دهیم.



شکل ۱ سری زمانی بازده‌های دارایی در مثال ذکرشده

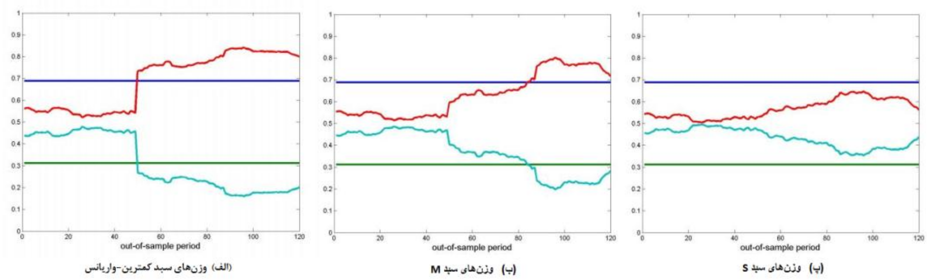
برای بررسی کارایی سبدهای مختلف، روش شبیه سازی غلتان را روی این سری زمانی اجرا می‌کنیم. ابتدا از ۱۲۰ بازده اولیه جهت محاسبه برآوردهایی از میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس نمونه‌ای استفاده می‌کنیم. سبدهای متناظر با این برآوردها را با استفاده از مسائل بهینه‌سازی نظیر آنها محاسبه می‌کنیم. سپس این روند را با غلتاندن پنجره برآورد یک مرحله به جلو ادامه می‌دهیم تا زمانی که به آخرین مشاهده سری زمانی برسیم. بنابراین بعد از انجام این روند سبدهای متناظر با ۱۲۰ پنجره برآورد متفاوت از هر ۱۲۰ بازده‌ها را خواهیم داشت. شکل زیر وزن‌های بدست آمده برای هر دارایی

از سبدهای میانگین-واریانس و کمترین-واریانس متناظر با ۱۲۰ پنجره برآورد متفاوت را نشان می‌دهد (هر یک از نمودارها مربوط به وزن یک دارایی است)



شکل ۲ وزن سبدهای پیشین برای دو دارایی ریسکی همراه با وزن سبدهای واقعی آنها

حال با درنظرگرفتن سری زمانی ارائه شده و تابع هیوبر بعنوان تابع زیان سبد M و تابع تیوکی بایویت برای تابع زیان سبد S، سبدهای متناظر با هر پنجره برآورد را برای این دو روش استوار محاسبه می‌کنیم. نتایج وزن‌های اختصاصی هرسبد به دو دارایی در شکل‌های زیر آمده است: .(توجه شود که محور عمودی شکل ۳ در بازه $[0,1]$ رسم شده ولی در شکل ۲ این محور در بازه $[-5,5]$ نوسانات وزن دو دارایی را نشان می‌دهد، که این بیانگر دقت بالای سبدهای استوار است).



شکل 3 وزنهای سبد کمترین-واریانس و سبدهای استوار M و S در بازه [0,1]

همان‌طور که از روی شکل مربوط به سری زمانی معلوم است، بازده‌های نمونه‌ای متناظر با زمان‌های ۱۶۹ و ۲۰۷ از توزیع انحراف D ، طبق همان یک درصد احتمالی که قبلا توصیف شد مشاهده شده‌اند و بقیه بازده‌های نمونه‌ای تحت توزیع نرمال(مفروض) هستند. اما مهمتر از همه رفتار و وزن‌هایی است که روش‌های متفاوت سبدهای استوار و سبد میانگین-واریانس به دو دارایی اختصاص می‌دهند. نکته اصلی تفاوت این روش‌ها زمانی ظاهر می‌شود که پنجره‌های برآورد بازده‌های نمونه‌ای شامل یک یا دو پرش منفی یا بعبارتی دیگر شامل بازده‌هایی می‌شوند که از توزیع انحراف طبعیت می‌کنند. دو شکل اولی سبدهای میانگین-واریانس با پارامتر ریسک‌گریزی $\gamma = 1$ و کمترین-واریانس را نشان می‌دهند و در سه شکل بالا به ترتیب از چپ به راست، وزن‌های اختصاصی به دو دارایی برای سبد کمترین-واریانس، البته با مقیاسی دقیق‌تر برای محور عمودی، و سبد M و سبد S نشان داده شده است. خطوط مستقیم در هر یک از این شکل‌ها نشانگر

وزن‌های حقیقی دو دارایی می‌باشد که طبق توزیع G و با جایگذاری میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس حقیقی در هر یک از مسائل متناظر سبدها بدست می‌آیند. با در نظرگرفتن تمام این موارد می‌توان دریافت که وزن‌های اختصاصی به دو دارایی طبق روشهای استوار از ثبات و دقت بیشتری در مقایسه با سبدهای پیشین برخوردار هستند. دامنه نوسان سبدهای پیشین و تمایل به متفاوت بودن از وزن‌های حقیقی در سبدهای پیشین بیشتر از سبدهای استوار مشاهده می‌شود. در واقع وزن‌هایی که سبدهای استوار، مخصوصا سبد S، به دو دارایی اختصاص می‌دهند بسیار بهتر و به وزن حقیقی دو دارایی نزدیک‌تر است. در واقع این واقعیت ناشی از کاهش تاثیر پرش‌های منفی بر سبدهای استوار برآوردشده، است.

مرجع‌ها

1. چارلز پی، ج.(۱۳۸۸). مدیریت سرمایه‌گذاری، ترجمه تهرانی، ر. و نوربخش، ع. انتشارات نگاه دانش.
2. DeMiguel, V, J.Nogales, F. (2009). Portfolio Selection with Robust Estimation, Operations Research, 1-12.
3. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, 77-91.